多様体の接続について

ほの

2025 年 7 月 8 日

概要

このノートは、多様体上の「接続」という概念が、現代物理学、特にゲージ理論や一般相対性理論においていかに基礎的かつ強力な数学的言語として機能するかを解説することを目的としています。本稿では、まずユークリッド空間におけるベクトル場の微分という直感から始め、これを一般の多様体へと拡張する際に必要となる概念として接続を導入します。具体的には、共変微分、平行移動、クリストッフェル記号といった基本的な要素を丁寧に解説し、接続が多様体上のベクトルやテンソルの「滑らかな変化」を定義するために不可欠であることを示します。さらに、リーマン多様体におけるレヴィ・チヴィタ接続、そしてゲージ理論におけるゲージ接続へと議論を展開し、それぞれの物理的意味合いと数学的構造を明らかにします。最終的に、接続が物理現象の背後にある幾何学的・力学的な構造を、数学的に厳密かつ明快に捉えるための道筋を示すことを目指します。

目次

第 I 部
接続

1　はじめに：なぜ接続を学ぶのか

1.1　物理学における幾何学と言語

現代物理学では、多くの現象が「場」という概念で記述されています。例えば、電磁場や素粒子の場などが挙げられます。これらの場がどのような振る舞いをするのかを理解するためには、それが定義される空間の性質を深く理解することが重要になります。特に、空間が平坦なユークリッド空間ではない場合、つまり「曲がっている」場合や、「穴が開いている」場合など、その幾何学的・位相的な構造が物理現象に決定的な影響を与えることがあります。

例えば、ド・ラームコホモロジーに関する記事でも触れましたが、物性物理学では、電子状態が記述される「パラメータ空間」がトーラスなどの「穴の開いた」多様体として現れることがあります。このパラメータ空間のトポロジー（位相的な形）が、ベリー位相やチャーン数といった物理量の量子化された性質として現れることがあります [cite: 460]。これは、空間の幾何学的な性質が物理法則に深く関わっていることを示唆しています。

1.2　接続の直感的導入：ユークリッド空間でのベクトルの微分

ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ では、ベクトル場の微分を考えることは非常に簡単です。例えば、2 次元平面上のベクトル場 $\boldsymbol{V}(x, y) = (V_x(x, y), V_y(x, y))$ を考えた場合、その微分は各成分を偏微分するだけで定義できます。

$$\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial x} = \left(\frac{\partial V_x}{\partial x}, \frac{\partial V_y}{\partial x} \right)$$

これは直感的で分かりやすいですね。しかし、空間が曲がっている「多様体」の上では、この単純な考え方は通用しません。

具体例：球面上のベクトル場

地球の表面のような 2 次元球面 S^2 を考えてみましょう。球面上の各点には、その点での「接平面」があり、そこにベクトルが住んでいます。例えば、風速ベクトルなどをイメージできます。

もし私たちが北極点から出発し、風速ベクトルを常に「北向き」に保ちながら赤道に沿って移動し、再び北極点に戻ってきたとします。ユークリッド空間の直感に従えば、出発点と最終点での風速ベクトルは同じ「北向き」になるはずだと考えるかもしれません。しかし、球面上の座標を考えると、北極点では「北向き」が特定の方向を指しますが、赤道上では「北向き」は経線に沿った方向を指し、その方向は地球の曲率によって変化します。最終的に北極点に戻ってきたとき、ベクトルは出発時と同じ方向を向いているとは限りません。

これは、多様体上でベクトルを移動させる際に、空間の「曲がり」がベクトルの向きに影響を与えることを示しています。この影響を考慮せずに単純に座標成分を微分すると、その変化が空間の曲がりに起因するものなのか、それともベクトル場自身の変化なのかが区別できません。

解釈と解説

この具体例が示すように、多様体上では「隣り合う点にあるベクトルを比較する」という操作が自明ではありません。ユークリッド空間では、座標軸が直線的で「平行」という概念が明確であるため、異なる点にあるベクトルでも簡単に比較できました。しかし、曲がった空間では、どの方向に「平行」に移動したとみなすべきかが問題となるのです。

この問題を解決するために導入されるのが「接続」という概念です。接続は、多様体上の各点に定義されたベクトル空間（接空間）の間を「滑らかに繋ぐ」ためのルールを与えるものです。これにより、異なる点にあるベクトルを比較したり、ベクトル場を適切に微分したりすることが可能になります。物理学では、この接続の概念が、重力場の記述（一般相対性理論）や素粒子の相互作用（ゲージ理論）において、極めて重要な役割を果たしています。

本稿では、この「接続」の概念を、その数学的定義から物理的な応用まで、順を追って解説していきます。

2　多様体と接空間の基礎

2.1　多様体の定義と例

幾何学的な対象を扱う上で、私たちはユークリッド空間に慣れ親しんでいます。しかし、物理学で現れる空間（例えば、曲がった時空や、電子状態のパラメータ空間など）は、必ずしもユークリッド空間のように平坦ではありません。そこで、局所的にはユークリッド空間と見なせるが、大域的には多様な形を持つ空間を扱うために「多様体」という概念が導入されます。

定義 2.1: 多様体の定義

n 次元の滑らかな（C^∞ 級）多様体 M とは、次の条件を満たす位相空間です。

1. **ハウスドルフ性**: 任意の異なる 2 点には、互いに交わらない近傍が存在します。
2. **第二可算性**: M を覆うことができる可算個の開集合（数え上げられる無限個の開集合）が存在します。
3. **局所ユークリッド性**: M の各点 p は、n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ の開集合と同相な近傍を持ちます。この同相写像の組 (U, ϕ) を「座標近傍」または「チャート」と呼びます。ここで、U は M の開集合、$\phi : U \to \phi(U) \subset \mathbb{R}^n$ は同相写像です。
4. **座標変換の滑らかさ**: M を覆うチャートの集まり（アトラス）において、任意の二つのチャート (U_α, ϕ_α) と (U_β, ϕ_β) が重なる部分 $U_\alpha \cap U_\beta$ が空でないとき、座標変換（貼り合わせ）写像

$$\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1} : \phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

が C^∞ 級写像（何回でも微分可能な写像）であること。

この定義における最後の条件は、多様体上で微分積分学（解析学）を展開することを可能にする「滑らかさ」を保証するものです。これにより、多様体上の関数やベクトル場を微分したり、積分したりといった操作が可能になります。

多様体の具体例

- $\mathbb{R}^n$ (ユークリッド空間): 私たちが最も慣れ親しんでいるユークリッド空間は、それ自体が最も自明な n 次元多様体です。チャートは一つ（恒等写像）だけで十分です。
- S^1 (円周): 1 次元の円周は、最も単純な非自明な多様体です。例えば、上半円と下半円をそれぞれ実数直線に射影する二つのチャートで覆うことができます。これら二つのチャートの重なり部分での座標変換写像は滑らかです。
- S^2 (球面): 地球の表面のような 2 次元球面は、北極と南極からの立体射影（ステレオ投影）を用いることで、それぞれ球面の大部分を $\mathbb{R}^2$ 平面に対応させるチャートを与えることができます。これらのチャートの貼り合わせも滑らかです。

- T^2 (トーラス): ドーナツの表面であるトーラスは、$S^1 \times S^1$（2 つの円周の直積）として定義される 2 次元多様体です。これは、周期境界条件を持つパラメータ空間として物性物理学でもよく登場します。

これらの例からもわかるように、多様体は局所的には平坦なユークリッド空間のように見えますが、大域的には「曲がっている」ことや「穴が開いている」ことがあります。接続の理論を学ぶ上では、このような多様体の概念を基礎として理解しておくことが重要になります。

2.2 接ベクトルと接空間

多様体上で微分積分を考えるためには、各点における「方向」や「傾き」を厳密に定義する必要があります。ユークリッド空間では、これは単純にベクトルとして扱えますが、多様体ではそう簡単ではありません。多様体上の点における「接ベクトル」とは、その点を滑らかに通過する曲線の、その点での「瞬間的な速度ベクトル」を抽象化したものと考えることができます。

現代数学では、接ベクトルを「関数に作用して実数を返す微分作用素」として定義することが一般的です。この定義は、物理学的な直感とも相性が良いものです。

定義 2.2: 接ベクトルと接空間

点 $p \in M$ における接ベクトル v_p とは、点 p の近傍で定義された滑らかな関数 f に対して実数を対応させる写像 $v_p : C^\infty(p) \to \mathbb{R}$ であり、次の条件を満たすものです。

1. **線形性**: 任意の滑らかな関数 f, g と実数 a, b に対して、$v_p(af+bg) = av_p(f)+bv_p(g)$ が成り立ちます。
2. **ライプニッツ則**: 任意の滑らかな関数 f, g に対して、$v_p(fg) = f(p)v_p(g)+g(p)v_p(f)$ が成り立ちます。

点 p における接ベクトル全体のなす集合を「接（ベクトル）空間」と呼び、T_pM と書きます。

接ベクトルの考え方

この定義は少し抽象的に感じるかもしれません。直感的には、多様体上の点 p を通る任意の滑らかな曲線 $\gamma(t)$ を考えたとき、その曲線に沿った関数の変化率を捉える演算子が接ベクトルである、と理解できます。つまり、$v_p(f) = \frac{d}{dt} f(\gamma(t))\big|_{t=0}$（ただし $\gamma(0) = p$）のように考えることができます。

局所座標 $(x^1, \dots, x^n)$ を用いると、各偏微分作用素 $\frac{\partial}{\partial x^i}\big|_p$ は上記の定義を満たします。これらの偏微分作用素は、接空間 T_pM の基底をなします。したがって、任意の接ベクトル v_p は、これらの基底の線形結合として一意に書くことができます。

$$v_p = \sum_{i=1}^{n} v^i \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p$$

ここで v^i は、局所座標系における接ベクトル v_p の成分です。

球面上の接ベクトル

再び 2 次元球面 S^2 を考えてみましょう。球面上の任意の点（例えば、北緯 30°、東経 135° の地点）では、その点に接する平面を考えることができます。この接平面が、その点における接空間 T_pS^2 にあたります。
この点における接ベクトルは、その地点にいる人がある方向に進むときの瞬間的な速度ベクトルに対応します。例えば、その地点で「真東」に向かう速度ベクトルや、「真北」に向かう速度ベクトルを考えることができます。これらは、その接空間の異なる方向を表す基底ベクトルと見なせます。
私たちが住む 3 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ の中に埋め込まれた球面を考えると、接空間は $\mathbb{R}^3$ の原点を通る平面とは異なり、球面上の各点に付随する平面となります。この意味で、接空間は多様体の各点で「局所的に」ユークリッド空間のように振る舞う空間の集まりなのです。

2.3 コベクトルと余接空間

接ベクトルが「関数を微分する機械」であるのに対し、「コベクトル」または「1-形式」と呼ばれるものは、「接ベクトルを飲み込んで実数を返す機械」と考えることができます。これは、接空間の双対空間の元として定義されます。

定義 2.3: 1-形式（コベクトル）と余接空間

多様体 M 上の点 p における「1-形式」（またはコベクトル）ω_p とは、点 p における接空間 T_pM から実数への線形写像 $\omega_p : T_pM \to \mathbb{R}$ のことです。点 p における 1-形式全体のなすベクトル空間を「余接空間」と呼び、T_p^*M と書きます。

局所座標 $(x^1, \ldots, x^n)$ を考えると、座標関数 x^i の微分 dx^i は、余接空間 T_p^*M の基底をなします。これらの基底 1-形式は、接空間の基底 $\frac{\partial}{\partial x^j}$ と次のような関係を満たします。

$$dx^i\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \delta^i_j$$

ここで δ^i_j はクロネッカーのデルタです。任意の 1-形式 ω_p は、これらの基底 1-形式の線形結合として一意に書くことができます。

$$\omega_p = \sum_{i=1}^{n} f_i(p)dx^i$$

ここで $f_i(p)$ は、局所座標系における 1-形式 ω_p の成分です。

物理における 1-形式の例：微小仕事

物理学における 1-形式の最も身近な例は、「微小仕事」です。力 $\boldsymbol{F} = (F_x, F_y, F_z)$ が質点に与える微小仕事 δW は、変位ベクトル $d\boldsymbol{r} = (dx, dy, dz)$ を用いて次のように書けます。

$$\delta W = \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

この表現は、力が「1-形式」として見なせることを示唆しています。ここでは、力 $\boldsymbol{F}$ が 1-形式の「成分」を与え、変位 $d\boldsymbol{r}$ が「接ベクトル」のような役割を果たすと考えることができます。1-形式 δW は、与えられた変位（接ベクトル）に対して、その方向にされた仕事（実数）を返す「機械」と見なせるわけです。
ド・ラームコホモロジーに関する記事でも触れられていますが、ベリー接続や電磁ポテンシャルなども 1-形式として扱われます。これらの物理量は、空間上の各点で「線積分」される性質を持ち、それが 1-形式の本質と一致します。

接ベクトルとコベクトルは互いに双対的な関係にあり、多様体上の微分幾何学を展開する上で不可欠な基礎概念です。これらの概念の上に、次章でいよいよ「接続」の定義に進んでいきます。

3　接続の数学的定義

前章では、多様体上の点における接ベクトルやコベクトルといった基本的な概念を導入しました。ユークリッド空間とは異なり、多様体では異なる点にあるベクトルを直接比較することが難しいという問題意識がありましたね。この問題を解決し、多様体上でベクトルやテンソルを「滑らかに微分する」ためのツールこそが、「接続」です。接続は、**空間そのものの歪みに応じた適切な補正を加えることで、多様体上でもあたかも平坦な空間であるかのように、ベクトルやテンソルを微分することを可能にします。**

3.1　共変微分：多様体上のベクトルの微分

ユークリッド空間では、ベクトル場の微分は単に各成分を偏微分することで行えました。しかし、多様体上では座標変換を行うと、ベクトルの成分だけでなく、基底ベクトル自身も変化します。この基底ベクトルの変化を考慮せずに微分すると、その結果は座標系の選び方に依存してしまい、幾何学的な意味を持ちません。

そこで導入されるのが「共変微分」という概念です。共変微分は、この基底ベクトルの変化を「補正」することで、座標系の選び方によらない、本質的なベクトルの微分を可能にします。この補正の考え方こそが、結晶構造に欠陥がある場所や、不均一なスピンテクスチャを持つ環境で運動する電子のように、局所的に「歪んだ」状況を記述する際に重要となります。**接続によるこの補正があることで、私たちは複雑な系をあたかも平坦な空間で扱っているかのように分析できるようになるのです。**

定義 3.1: 共変微分

多様体 M 上のベクトル場 X に沿ったベクトル場 Y の共変微分 $\nabla_X Y$ とは、次の性質を満たす写像 $\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ のことです。ここで $\mathfrak{X}(M)$ は M 上の滑らかなベクトル場全体のなす空間です。

1. **第一成分に関する線形性**: 任意のベクトル場 X_1, X_2, Y と関数 $f \in C^\infty(M)$ に対して、
$$\nabla_{fX_1+X_2} Y = f\nabla_{X_1} Y + \nabla_{X_2} Y$$
2. **第二成分に関する線形性**: 任意のベクトル場 X, Y_1, Y_2 と関数 $f \in C^\infty(M)$ に対して、
$$\nabla_X (Y_1 + fY_2) = \nabla_X Y_1 + f\nabla_X Y_2 + (Xf)Y_2$$
ここで (Xf) は、ベクトル場 X が関数 f に作用する方向微分 $X(f)$ を表します。この規則は「ライプニッツ則」と呼ばれ、通常の積の微分法則を拡張したものです。

共変微分の役割

この定義は抽象的に見えますが、共変微分 $\nabla_X Y$ は「ベクトル場 Y がベクトル場 X の方向にどれだけ変化するか」を測る量だと考えることができます。通常の微分（方向微分）$X(Y_i)$ はベクトル場の成分の変化のみを捉えますが、共変微分はそれに加えて基底ベクトルの向きの変化も補正してくれます。これにより、多様体上のベクトルの「真の変化」を捉えることが可能になるのです。

特に、$\nabla_X Y = 0$ となる場合、ベクトル場 Y は X の方向に「平行に移動している」と解釈できます。この考え方が「平行移動」の概念へと繋がります。

ユークリッド空間における共変微分

最も簡単な例として、2 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^2$ を考えましょう。通常のデカルト座標 (x, y) を用いると、基底ベクトル場は $\partial_x = \frac{\partial}{\partial x}$ と $\partial_y = \frac{\partial}{\partial y}$ です。これらの基底ベクトルは、空間のどこへ行っても常に同じ方向を向いています（つまり、平行です）。

ここで、ベクトル場 $Y = Y^x\partial_x + Y^y\partial_y$ を、ベクトル場 $X = X^x\partial_x + X^y\partial_y$ の方向に共変微分することを考えます。ユークリッド空間では、基底ベクトル ∂_x, ∂_y は定ベクトルなので、その共変微分はゼロになります。すなわち、$\nabla_X\partial_x = 0$, $\nabla_X\partial_y = 0$ です。

このとき、共変微分のライプニッツ則を用いると、

$$\begin{aligned}
\nabla_X Y &= \nabla_X(Y^x\partial_x + Y^y\partial_y) \\
&= (XY^x)\partial_x + Y^x\nabla_X\partial_x + (XY^y)\partial_y + Y^y\nabla_X\partial_y \\
&= (XY^x)\partial_x + (XY^y)\partial_y
\end{aligned}$$

となります。ここで $XY^x = X^x\frac{\partial Y^x}{\partial x} + X^y\frac{\partial Y^x}{\partial y}$ のように、ベクトル場 X による関数 Y^x の方向微分を表します。結果を見ると、ユークリッド空間における共変微分は、通常のベクトル場の方向微分と全く同じ形をしています。これは、ユークリッド空間が「平坦」であり、基底ベクトルの向きを補正する必要がないため、接続の寄与がゼロになることを意味しています。

この簡単な例から、共変微分が通常の微分を一般化したものであることが分かります。しかし、多様体が曲がっている場合には、この共変微分が重要な「補正項」を含むことになります。次のセクションでは、その補正項、すなわち「クリストッフェル記号」について詳しく見ていきます。

3.2 クリストッフェル記号：接続の座標表示

前節では、共変微分が多様体上でベクトル場を「滑らかに微分する」ための概念であることをご紹介しました。しかし、共変微分の定義は抽象的であり、具体的な計算を行うためには、座標系を用いた表示が必要です。この座標表示において登場するのが「クリストッフェル記号」です。クリストッフェル記号は、多様体の「曲がり具合」を局所的に表現する量であり、基底ベクトルの微分がどのように変換されるかを示します。**このクリストッフェル記号こそが、前節で述べた

「空間の歪みに応じた補正」を具体的に与える量に他なりません。**

定義 3.2: クリストッフェル記号

多様体 M 上に局所座標系 $(x^1, \ldots, x^n)$ を導入し、それに対応する基底ベクトル場を $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$ とします。このとき、共変微分 $\nabla_{\partial_i}\partial_j$ は、同じ接空間の基底ベクトルの線形結合として次のように表せます。

$$\nabla_{\partial_i}\partial_j = \sum_{k=1}^{n} \Gamma_{ij}^k \partial_k$$

ここで現れる係数 Γ_{ij}^k を「クリストッフェル記号」（またはクリストッフェルの接続係数）と呼びます。

クリストッフェル記号の役割

クリストッフェル記号 Γ_{ij}^k は、∂_i の方向に移動したときに、基底ベクトル ∂_j がどのように変化し、どの程度 ∂_k の成分を持つようになるかを示す量です。ユークリッド空間のように基底ベクトルが一定の方向を向いている（$\nabla_{\partial_i}\partial_j = 0$）場合、すべてのクリストッフェル記号はゼロになります。しかし、多様体が曲がっている場合、クリストッフェル記号は一般にゼロではなくなり、その値が多様体の曲率を反映することになります。

このクリストッフェル記号を用いると、任意のベクトル場 $Y = \sum_j Y^j \partial_j$ をベクトル場 $X = \sum_i X^i \partial_i$ の方向に共変微分した結果 $\nabla_X Y$ は、次の成分表示で与えられます。

共変微分の座標表示

ベクトル場 $X = X^i \partial_i$ と $Y = Y^j \partial_j$ に対する共変微分 $\nabla_X Y$ の k 成分は、

$$(\nabla_X Y)^k = \sum_i X^i \left(\frac{\partial Y^k}{\partial x^i} + \sum_j \Gamma_{ij}^k Y^j \right)$$

と表されます。

証明の概要

共変微分の線形性とライプニッツ則、そしてクリストッフェル記号の定義を用いて計算でき

ます。

$$
\begin{aligned}
\nabla_X Y &= \nabla_{\sum_i X^i \partial_i} \left(\sum_j Y^j \partial_j \right) \\
&= \sum_i X^i \nabla_{\partial_i} \left(\sum_j Y^j \partial_j \right) && \text{(第一成分の線形性)} \\
&= \sum_i X^i \sum_j \left((\partial_i Y^j) \partial_j + Y^j \nabla_{\partial_i} \partial_j \right) && \text{(第二成分のライプニッツ則)} \\
&= \sum_i X^i \sum_j \left((\partial_i Y^j) \partial_j + Y^j \sum_k \Gamma_{ij}^k \partial_k \right) && \text{(クリストッフェル記号の定義)} \\
&= \sum_i \sum_j (X^i \partial_i Y^j) \partial_j + \sum_i \sum_j \sum_k (X^i Y^j \Gamma_{ij}^k) \partial_k
\end{aligned}
$$

ここで、右辺第二項のダミー添字 j と k を入れ替える（$j \leftrightarrow k$）と、

$$
\sum_i \sum_k (X^i \partial_i Y^k) \partial_k + \sum_i \sum_j \sum_k (X^i Y^j \Gamma_{ij}^k) \partial_k
$$

となります。∂_k でまとめると、

$$
\sum_k \left(\sum_i X^i \frac{\partial Y^k}{\partial x^i} + \sum_i \sum_j X^i \Gamma_{ij}^k Y^j \right) \partial_k
$$

したがって、k 成分は $\sum_i X^i \left(\frac{\partial Y^k}{\partial x^i} + \sum_j \Gamma_{ij}^k Y^j \right)$ となります。

この表示式を見ると、共変微分が「通常の偏微分」と「クリストッフェル記号による補正項」の和になっていることがわかります。この補正項が、多様体の曲がりによって生じる基底ベクトルの方向の変化を打ち消し、真の微分を抽出する役割を担っています。**この「補正項」こそが、結晶構造の欠陥や不均一なスピンテクスチャといった物理的な「歪み」を数学的に取り扱い、あたかも平坦な空間であるかのように問題を記述するための鍵となります。**

極座標におけるクリストッフェル記号

2 次元ユークリッド平面 $\mathbb{R}^2$ を考えますが、今回はデカルト座標 (x, y) ではなく、極座標 (r, θ) を用いてみましょう。極座標における基底ベクトルは ∂_r と ∂_θ です。
ここで、∂_θ のベクトルを考えてみましょう。デカルト座標で書くと、$\partial_r = (\cos\theta, \sin\theta)$ $\partial_\theta = (-r\sin\theta, r\cos\theta)$ です。これらの基底ベクトルは、点によって方向や長さが変化します。例えば、原点から離れるほど ∂_θ の長さは大きくなります。
この場合、クリストッフェル記号はゼロではありません。いくつか計算してみると、例えば、

$$
\nabla_{\partial_r} \partial_r = 0
$$

$$\nabla_{\partial_r}\partial_\theta = \frac{1}{r}\partial_\theta$$

$$\nabla_{\partial_\theta}\partial_r = \frac{1}{r}\partial_\theta$$

$$\nabla_{\partial_\theta}\partial_\theta = -r\partial_r$$

となります（ここでは代表的なものを示しています。正確な導出には基底ベクトルの内積や計量テンソルが必要です)。

特に最後の $\nabla_{\partial_\theta}\partial_\theta = -r\partial_r$ という式は非常に興味深いです。これは「θ 方向に移動したときに、θ 方向の基底ベクトルが $-r$ 倍の r 方向の成分を持つようになる」ことを意味します。直感的には、円周に沿って動くとき、その接線方向のベクトルは常に円の中心に向かって「曲がっている」ため、その変化が半径方向の成分として現れる、と解釈できます。

このように、平坦なユークリッド空間であっても、曲がった座標系（極座標）を用いるとクリストッフェル記号が現れ、その座標系の「歪み」を表現することがわかります。この歪みが、多様体の曲がり具合を記述するクリストッフェル記号の本質と繋がっていくのです。

クリストッフェル記号は、接続の具体的な計算に不可欠な要素であり、特に一般相対性理論において重力場の効果を記述する上で中心的な役割を果たします。

3.3 クリストッフェル記号：接続の座標表示

前節では、共変微分が多様体上でベクトル場を「滑らかに微分する」ための概念であることをご紹介しました。しかし、共変微分の定義は抽象的であり、具体的な計算を行うためには、座標系を用いた表示が必要です。この座標表示において登場するのが「クリストッフェル記号」です。クリストッフェル記号は、多様体の「曲がり具合」を局所的に表現する量であり、基底ベクトルの微分がどのように変換されるかを示します。**このクリストッフェル記号こそが、前節で述べた「空間の歪みに応じた補正」を具体的に与える量に他なりません。**

定義 3.3: クリストッフェル記号

多様体 M 上に局所座標系 $(x^1, \ldots, x^n)$ を導入し、それに対応する基底ベクトル場を $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$ とします。このとき、共変微分 $\nabla_{\partial_i}\partial_j$ は、同じ接空間の基底ベクトルの線形結合として次のように表せます。

$$\nabla_{\partial_i}\partial_j = \sum_{k=1}^{n} \Gamma^k_{ij}\partial_k$$

ここで現れる係数 Γ^k_{ij} を「クリストッフェル記号」（またはクリストッフェルの接続係数）と呼びます。

クリストッフェル記号の役割

クリストッフェル記号 Γ^k_{ij} は、∂_i の方向に移動したときに、基底ベクトル ∂_j がどのように変化し、どの程度 ∂_k の成分を持つようになるかを示す量です。ユークリッド空間のように基底ベクトルが一定の方向を向いている（$\nabla_{\partial_i}\partial_j = 0$）場合、すべてのクリストッフェル記号はゼロになります。しかし、多様体が曲がっている場合、クリストッフェル記号は一般にゼロではなくなり、その値が多様体の曲率を反映することになります。

このクリストッフェル記号を用いると、任意のベクトル場 $Y = \sum_j Y^j \partial_j$ をベクトル場 $X = \sum_i X^i \partial_i$ の方向に共変微分した結果 $\nabla_X Y$ は、次の成分表示で与えられます。

共変微分の座標表示

ベクトル場 $X = X^i \partial_i$ と $Y = Y^j \partial_j$ に対する共変微分 $\nabla_X Y$ の k 成分は、

$$(\nabla_X Y)^k = \sum_i X^i \left(\frac{\partial Y^k}{\partial x^i} + \sum_j \Gamma^k_{ij} Y^j \right)$$

と表されます。

証明の概要

共変微分の線形性とライプニッツ則、そしてクリストッフェル記号の定義を用いて計算できます。

$$\begin{aligned}
\nabla_X Y &= \nabla_{\sum_i X^i \partial_i} \left(\sum_j Y^j \partial_j \right) \\
&= \sum_i X^i \nabla_{\partial_i} \left(\sum_j Y^j \partial_j \right) && \textbf{(第一成分の線形性)} \\
&= \sum_i X^i \sum_j \left((\partial_i Y^j)\partial_j + Y^j \nabla_{\partial_i}\partial_j \right) && \textbf{(第二成分のライプニッツ則)} \\
&= \sum_i X^i \sum_j \left((\partial_i Y^j)\partial_j + Y^j \sum_k \Gamma^k_{ij}\partial_k \right) && \textbf{(クリストッフェル記号の定義)} \\
&= \sum_i \sum_j (X^i \partial_i Y^j)\partial_j + \sum_i \sum_j \sum_k (X^i Y^j \Gamma^k_{ij})\partial_k
\end{aligned}$$

ここで、右辺第二項のダミー添字 j と k を入れ替える（$j \leftrightarrow k$）と、

$$\sum_i \sum_k (X^i \partial_i Y^k)\partial_k + \sum_i \sum_j \sum_k (X^i Y^j \Gamma^k_{ij})\partial_k$$

となります。∂_k でまとめると、

$$\sum_k \left(\sum_i X^i \frac{\partial Y^k}{\partial x^i} + \sum_i \sum_j X^i \Gamma^k_{ij} Y^j \right) \partial_k$$

したがって、k 成分は $\sum_i X^i \left(\frac{\partial Y^k}{\partial x^i} + \sum_j \Gamma^k_{ij} Y^j \right)$ となります。

この表示式を見ると、共変微分が「通常の偏微分」と「クリストッフェル記号による補正項」の和になっていることがわかります。この補正項が、多様体の曲がりによって生じる基底ベクトルの方向の変化を打ち消し、真の微分を抽出する役割を担っています。**この「補正項」こそが、結晶構造の欠陥や不均一なスピンテクスチャといった物理的な「歪み」を数学的に取り扱い、あたかも平坦な空間であるかのように問題を記述するための鍵となります。**

極座標におけるクリストッフェル記号

2 次元ユークリッド平面 $\mathbb{R}^2$ を考えますが、今回はデカルト座標 (x, y) ではなく、極座標 (r, θ) を用いてみましょう。極座標における基底ベクトルは ∂_r と ∂_θ です。

ここで、∂_θ のベクトルを考えてみましょう。デカルト座標で書くと、$\partial_r = (\cos\theta, \sin\theta)$ $\partial_\theta = (-r\sin\theta, r\cos\theta)$ です。これらの基底ベクトルは、点によって方向や長さが変化します。例えば、原点から離れるほど ∂_θ の長さは大きくなります。

この場合、クリストッフェル記号はゼロではありません。いくつか計算してみると、例えば、

$$\nabla_{\partial_r} \partial_r = 0$$

$$\nabla_{\partial_r} \partial_\theta = \frac{1}{r} \partial_\theta$$

$$\nabla_{\partial_\theta} \partial_r = \frac{1}{r} \partial_\theta$$

$$\nabla_{\partial_\theta} \partial_\theta = -r \partial_r$$

となります（ここでは代表的なものを示しています。正確な導出には基底ベクトルの内積や計量テンソルが必要です)。

特に最後の $\nabla_{\partial_\theta} \partial_\theta = -r\partial_r$ という式は非常に興味深いです。これは「θ 方向に移動したときに、θ 方向の基底ベクトルが $-r$ 倍の r 方向の成分を持つようになる」ことを意味します。直感的には、円周に沿って動くとき、その接線方向のベクトルは常に円の中心に向かって「曲がっている」ため、その変化が半径方向の成分として現れる、と解釈できます。

このように、平坦なユークリッド空間であっても、曲がった座標系（極座標）を用いるとクリストッフェル記号が現れ、その座標系の「歪み」を表現することがわかります。この歪みが、多様体の曲がり具合を記述するクリストッフェル記号の本質と繋がっていくのです。

クリストッフェル記号は、接続の具体的な計算に不可欠な要素であり、特に一般相対性理論において重力場の効果を記述する上で中心的な役割を果たします。

3.4　平行移動：接続が定める「経路」

共変微分は、多様体上でベクトルがどのように「滑らかに変化するか」を定義するツールでした。この共変微分を用いて、多様体上でベクトルを「向きを変えずに」移動させる、すなわち「平行移動」させる概念を導入することができます。ユークリッド空間では、ベクトルを平行移動させるのは非常に簡単で、単にベクトルの成分を一定に保てば良いだけでした。しかし、多様体上では、空間の曲がりがあるために、どこへ移動しても常に「同じ向き」を保つことは自明ではありません。平行移動は、この「向きを保つ」という直感を多様体上で厳密に定義するものです。

定義 3.4: 平行移動

多様体 M 上の曲線 $\gamma(t)$ に沿って定義されたベクトル場 $V(t)$ が「平行移動している」とは、その曲線に沿った共変微分がゼロになることと定義されます。

$$\nabla_{\dot{\gamma}(t)} V(t) = 0$$

ここで $\dot{\gamma}(t)$ は曲線 $\gamma(t)$ の接ベクトル場です。

平行移動の解釈

この定義は、「ベクトル $V(t)$ が、曲線 $\gamma(t)$ の各点において、曲線に沿った方向に全く変化しない」ことを意味しています。つまり、空間の曲がりによって基底ベクトルが変化しても、その変化分を打ち消すようにベクトルの成分を調整することで、常に「同じ方向」を指し続けるように見えるベクトル場を構成する概念です。これは、多様体上で「まっすぐ進む」という概念、すなわち「測地線」の定義にも繋がっていきます。

球面上の平行移動

前々節の導入部分で、球面上のベクトルを北極点から赤道を経由して再び北極点に戻す例を挙げました。ここで、そのベクトルの平行移動を考えてみましょう。

球面上の点 P から点 Q へベクトルを平行移動させることを考えます。例えば、北極点から出発して真南に（経線に沿って）赤道まで移動し、そこで 90° 東へ（赤道に沿って）移動し、そこから再び真北に（経線に沿って）北極点に戻る閉じた経路を考えます。

出発点である北極点で、あるベクトル（例えば、真東を指すベクトル）を考えます。このベクトルを、経路に沿って常に平行移動させながら移動させたとします。

1. **北極点から赤道まで真南に移動**: 経線に沿って移動する限り、真東を指すベクトルはそのまま真東を指し続けるように見えます。

2. **赤道に沿って 90° 東へ移動**: ここで球面上の曲率が顕著になります。赤道に沿って移動しながら、出発時に真東を指していたベクトルを平行移動させると、そのベクトルは次第に北東方向へ「傾いていく」ように見えます。これは、私たちの直感的な「平行」とは異なる振る舞いです。

3. **赤道から北極点まで真北に移動**: ここでもベクトルは平行移動のルールに従って変化し続けます。

最終的に北極点に戻ってきたとき、そのベクトルは出発時に真東を指していたベクトルとは異なる向きを指していることに気づきます。具体的には、元の向きから 90° 回転した方向を指すことになります。

この最終的なベクトルの向きのずれは、移動した経路が囲む「球面上の面積」(すなわち、空間の曲がり)に起因します。この現象は「ホロノミー」と呼ばれ、接続が空間の曲がりをどのように捉えているかを示す非常に重要な概念です。

この具体例は、多様体上での平行移動がユークリッド空間でのそれとは大きく異なることを示しています。平行移動は、共変微分がゼロになるという条件によって厳密に定義され、その結果としてベクトルの向きに生じるずれは、多様体の持つ曲率という幾何学的な性質に深く関係しているのです。**このように、接続という形で局所的な不均一構造を導入し、その効果を曲線に沿って積み重ねることで、最終的には空間の局所的あるいは大域的な曲率の概念へと繋がっていくのです。**次節では、この接続が多様体のどのような幾何学的性質を捉えるのか、特に「ねじれ」と「曲率」という二つの概念に焦点を当てて掘り下げていきます。

4　接続が持つ性質と概念

前節までで、共変微分やクリストッフェル記号といった接続の基本的な数学的枠組みを学び、それが多様体の「歪み」を補正してベクトルを微分するためのツールであることを理解しました。接続は、多様体の幾何学的な性質を捉える上で非常に強力な概念であり、その性質をより深く理解するために、「ねじれ」と「曲率」という二つの重要な概念を導入します。これらは、接続が空間上でベクトルを移動させたときに生じる、本質的な幾何学的特性を示すものです。

4.1　ねじれ (Torsion)：接続の非対称性

接続は、二つのベクトル場 X, Y に対して $\nabla_X Y$ という形で定義されましたが、一般的には $\nabla_X Y$ と $\nabla_Y X$ は等しくありません。つまり、ベクトルの微分順序を入れ替えると、結果が異なる可能性があるのです。この非対称性を定量的に測るのが「ねじれ」テンソルです。ねじれは、空間が「ひねられている」度合いを示すものと解釈できます。

定義 4.1: ねじれテンソル

多様体 M 上の接続 ∇ が与えられたとき、任意の二つの滑らかなベクトル場 X, Y に対して、ねじれテンソル $T(X, Y)$ は次のように定義されます。

$$T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]$$

ここで $[X, Y]$ は、ベクトル場 X と Y のリー括弧（Lie bracket）と呼ばれるもので、$[X, Y]f = X(Yf) - Y(Xf)$ と定義されるベクトル場です。

ねじれテンソルの解釈

リー括弧 $[X, Y]$ は、ベクトル場 X と Y が張る平行四辺形を考える際に、その「閉じるずれ」のようなものを表します。もし空間が完全に「滑らか」で、座標系がねじれていない場合、理想的にはリー括弧はゼロになります。

したがって、ねじれテンソル $T(X, Y)$ は、$\nabla_X Y$ と $\nabla_Y X$ の非対称性が、リー括弧のずれによって説明できない部分、つまり接続そのものが持つ非対称性を示す量であると解釈できます。

物理的な観点からは、ねじれテンソルが非ゼロである空間は、何らかの「ひねり」や「不均一性」を内在していると考えられます。例えば、結晶中の転位欠陥など、物質が持つ不連続な構造を幾何学的に記述する際に、ねじれが非ゼロの接続が用いられることがあります。これは、通常の連続的な空間の曲がり（後述の曲率）とは異なる、よりミクロなレベルでの歪みを表現する可能性があります。

ねじれテンソルの座標表示

局所座標系 $(x^1, \ldots, x^n)$ において、ねじれテンソル $T(X,Y)$ の k 成分は、ベクトル場 $X = X^i\partial_i$ および $Y = Y^j\partial_j$ に対して、クリストッフェル記号 Γ^k_{ij} を用いて次のように表されます。

$$T(X,Y)^k = \sum_{i,j} X^i Y^j (\Gamma^k_{ij} - \Gamma^k_{ji})$$

この式から、ねじれがゼロである $(\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X,Y])$ という条件は、クリストッフェル記号が下二つの添字に関して対称であること、すなわち $\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji}$ と同値であることがわかります。

証明の概要

共変微分の座標表示とリー括弧の定義を用いて、直接計算します。リー括弧の座標表示は $[X,Y]^k = \sum_{i,j}(X^i\partial_i Y^k - Y^j\partial_j X^k)$ です。共変微分の座標表示は $(\nabla_X Y)^k = \sum_i X^i \left(\frac{\partial Y^k}{\partial x^i} + \sum_j \Gamma^k_{ij} Y^j\right)$ でした。
したがって、

$$\begin{aligned}
(\nabla_X Y)^k - (\nabla_Y X)^k &= \sum_i X^i \left(\frac{\partial Y^k}{\partial x^i} + \sum_j \Gamma^k_{ij} Y^j\right) - \sum_i Y^i \left(\frac{\partial X^k}{\partial x^i} + \sum_j \Gamma^k_{ij} X^j\right) \\
&= \sum_i X^i \frac{\partial Y^k}{\partial x^i} + \sum_{i,j} X^i Y^j \Gamma^k_{ij} - \sum_i Y^i \frac{\partial X^k}{\partial x^i} - \sum_{i,j} Y^i X^j \Gamma^k_{ij}
\end{aligned}$$

ここで、ダミー添字を適切に入れ替えると、

$$\begin{aligned}
&= \sum_i X^i \frac{\partial Y^k}{\partial x^i} + \sum_{i,j} X^i Y^j \Gamma^k_{ij} - \sum_j Y^j \frac{\partial X^k}{\partial x^j} - \sum_{j,i} Y^j X^i \Gamma^k_{ji} \\
&= \left(\sum_i X^i \frac{\partial Y^k}{\partial x^i} - \sum_j Y^j \frac{\partial X^k}{\partial x^j}\right) + \sum_{i,j} X^i Y^j (\Gamma^k_{ij} - \Gamma^k_{ji}) \\
&= [X,Y]^k + \sum_{i,j} X^i Y^j (\Gamma^k_{ij} - \Gamma^k_{ji})
\end{aligned}$$

よって、$T(X,Y)^k = (\nabla_X Y)^k - (\nabla_Y X)^k - [X,Y]^k = \sum_{i,j} X^i Y^j (\Gamma^k_{ij} - \Gamma^k_{ji})$ となります。

ねじれが非ゼロの例：ヘリコイド面

日常生活でねじれをイメージしやすい例としては、螺旋階段の中心軸や、DNA の二重螺旋のような構造が挙げられます。数学的には、「ヘリコイド」と呼ばれる曲面はねじれを持つ空間の単純なモデルとなります。ヘリコイド上の点において、ある方向にベクトルを移動させ、別の方向に移動させてから元の方向に戻ると、最終的なベクトルの向きが出発時と異なるだけでなく、移動経路が囲む「面積」とは異なる形でずれることがあります。この追加的

なずれが、ねじれの存在を示唆します。
物理学におけるより直接的な例としては、**不均一な媒質中の弾性体の歪み**が考えられます。例えば、金属材料に局所的な応力や塑性変形が生じた場合、その内部構造は単なる曲がりだけでなく、「ひねり」を伴うことがあります。このような現象を幾何学的に記述する際には、ねじれが非ゼロの接続を持つ理論が適用されることがあります。これにより、物質内部のミクロな欠陥や不均一性が、接続の性質として表現されるのです。

多くの物理理論（特に一般相対性理論）では、ねじれがゼロである接続（対称な接続）を仮定することが多いですが、それは物理的な要請に基づいています。しかし、量子重力理論や、前述した結晶欠陥の記述など、特定の文脈ではねじれが非ゼロの接続が考慮されることもあります。ねじれは、空間が持つもう一つの側面、すなわち「ひねり」の幾何学を捉える重要な概念なのです。

次の節では、接続が持つもう一つの本質的な性質である「曲率」について詳しく見ていきます。これは、空間の「曲がり」を直接的に表現する概念であり、重力やゲージ場の物理と深く結びついています。

4.2 曲率 (Curvature)：接続が定める「空間の曲がり」

前節では、接続が持つ非対称性を示す「ねじれ」について学びました。しかし、接続の最も本質的で物理的に重要な側面は、空間の「曲がり」を定量的に記述する「曲率」です。曲率は、閉じた経路に沿ってベクトルを平行移動させたときに生じる、最終的な向きのずれによって捉えることができます。これは、冒頭で述べた球面上の平行移動の例で直感的に感じられた現象を、厳密に数学化したものです。

定義 4.2: 曲率テンソル

多様体 M 上の接続 ∇ が与えられたとき、任意の三つの滑らかなベクトル場 X, Y, Z に対して、曲率テンソル $R(X, Y)Z$ は次のように定義されます。

$$R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z$$

曲率テンソルの解釈

この定義式は、ベクトル場 Z を、まず Y 方向に、次に X 方向に共変微分する操作（$\nabla_X \nabla_Y Z$）と、その順序を入れ替えて X 方向に、次に Y 方向に共変微分する操作（$\nabla_Y \nabla_X Z$）との差を測っています。もし空間が完全に平坦であれば、この二つの操作の結果は等しくなり、その差はゼロになるはずです。しかし、空間が曲がっている場合、この差はゼロではありません。
リー括弧 $[X, Y]$ の項は、ベクトル場 X と Y が張る面が完全に「閉じて」いないことによる影響を補正するものです。したがって、$R(X, Y)Z$ は、ベクトル場 X と Y が定義する無限小の平行四辺形に沿ってベクトル Z を一周平行移動させたときに生じる、ベクトルの

向きのずれを正確に表現していると解釈できます。**この「向きのずれ」こそが、空間の局所的な曲がり具合の直接的な証拠なのです。**

物理学では、この曲率テンソルが極めて重要な役割を果たします。例えば、一般相対性理論において、時空の曲率が重力場そのものを記述します。粒子が重力によって曲がった経路を進むのは、時空が曲がっているために、あたかも「まっすぐ」進もうとした結果として生じる現象なのです。

曲率テンソルの座標表示

局所座標系 $(x^1, \ldots, x^n)$ において、曲率テンソル $R(X,Y)Z$ の成分表示は複雑ですが、その最も基本的な形は、基底ベクトル $\partial_i, \partial_j, \partial_k$ に対する成分 R^l_{ijk} として定義され、クリストッフェル記号 Γ^k_{ij} を用いて次のように表されます。

$$R^l_{ijk} = \frac{\partial \Gamma^l_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial \Gamma^l_{ik}}{\partial x^j} + \sum_m (\Gamma^l_{im}\Gamma^m_{jk} - \Gamma^l_{jm}\Gamma^m_{ik})$$

この R^l_{ijk} が、曲率テンソルの成分です。任意のベクトル場 X, Y, Z に対する曲率テンソルは、これらの成分と各ベクトル場の成分を用いて表されます。

証明の概要

曲率テンソルの定義式 $R(X,Y)Z = \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z$ に、共変微分の座標表示 $(\nabla_A B)^k = A^i(\partial_i B^k + \Gamma^k_{ij}B^j)$ およびリー括弧の座標表示 $[X,Y]^k = X^i\partial_i Y^k - Y^i\partial_i X^k$ を代入し、各項を丁寧に計算することで導出されます。計算は煩雑ですが、最終的にはクリストッフェル記号とその偏微分、およびクリストッフェル記号の積の項に帰着します。特に重要なのは、クリストッフェル記号の微分が含まれることから、曲率が接続の「変化」の性質を捉えていることが分かります。

球面上の曲率

球面 S^2 のような一様に曲がった空間では、曲率は一定の非ゼロ値をとります。例えば、球面上の任意の点を選び、その点での接平面を考えます。この接平面上で二つの接ベクトル X, Y を選び、それらが張る無限小の平行四辺形に沿って、別のベクトル Z を一周平行移動させてみましょう。

すると、一周して戻ってきたベクトル Z' は、元のベクトル Z とはわずかに異なる向きを指すことになります。このずれの角度や方向が、その場所の曲率によって決まります。球面上ではどこでも同じように曲がっているため、このずれは場所によらず一定です。

これを物理的に考えると、重力のない平坦な空間（ユークリッド空間）では、ボールを投げれば放物線を描きますが、それは地球の重力という「力」があるためです。しかし、一般相対性理論の視点では、重力とは時空の曲がりそのものです。ボールが放物線を描くのは、**曲がった時空上で「まっすぐ」（測地線に沿って）進もうとした結果、私たちの 3 次元空間か**

ら見ると曲がって見える、と解釈されます。この「時空の曲がり」を定量的に記述しているのが、曲率テンソルなのです。

局所的な曲がりと大域的なトポロジー

この曲率の概念は、局所的な幾何学的な性質を表しますが、これを空間全体で積分することで、ド・ラームコホモロジーで学んだような「チャーン数」や「ガウス・ボンネの定理」など、空間の大域的な位相（トポロジー）的な不変量と結びつくことがあります。これは、**接続によって導入される局所的な不均一性や歪みが、空間全体にわたって積み重なることで、最終的に空間の「穴の数」や「ねじれ」といった大域的な幾何学的・位相的特徴を決定する**という深遠な関係を示しています。

曲率テンソルは、多様体の最も重要な幾何学的情報の一つであり、これがゼロになる場合、その空間は局所的にユークリッド空間と同等である（平坦である）と見なせます。重力理論やゲージ理論といった現代物理学の多くの分野で、この曲率が物理的な「場」の強度や相互作用の源として現れることになります。次の節では、この曲率と接続の具体的な物理的応用についてさらに詳しく見ていきます。

4.3　ホロノミー：閉ループに沿った平行移動

前節で曲率が「空間の曲がり」を局所的に測る量であることを学びました。この曲率の概念は、閉じた経路に沿ってベクトルを平行移動させたときに、最終的にベクトルが元の方向からどれだけ「ずれる」かという現象と密接に結びついています。このずれこそが「ホロノミー」と呼ばれるものです。ホロノミーは、接続が空間上でベクトルをどのように「ねじりながら」移動させるかを示す大域的な側面を持っています。

定義 4.3: ホロノミー

多様体 M 上の点 p と、点 p を始点および終点とする閉じた曲線 γ を考えます。点 p における接ベクトル $V_p \in T_pM$ を、曲線 γ に沿って平行移動させた結果のベクトルを V'_p とします。このとき、V'_p は再び点 p の接空間 T_pM の元となります。
平行移動の操作は線形写像を誘導し、これを $P_\gamma : T_pM \to T_pM$ と書くことができます。この写像 P_γ を、曲線 γ に沿った「ホロノミー変換」と呼びます。
点 p を基点とするすべての可縮な閉曲線に沿ったホロノミー変換のなす群を「制限ホロノミー群」と呼びます。

ホロノミーの解釈

ホロノミー変換 P_γ は、閉じた経路を一周することで、ベクトルがどれだけ「回転」したかを示します。もし空間が完全に平坦であれば、どのような閉経路を辿ってもベクトルは元の

向きに戻ってくるため、P_γ は恒等変換となります。しかし、空間に曲率が存在する場合、閉経路を一周するとベクトルは元の向きからずれてしまいます。このずれは、経路が囲む空間の曲率の総和に依存します。

ホロノミーは、接続が多様体上の局所的な不均一性や歪みを積み重ねた結果、大域的にどのような影響を及ぼすかを示す非常に強力な概念です。 局所的な曲率（微分幾何学的な量）が、閉経路を一周したときに生じるベクトルの回転（大域的なトポロジー的な量）に繋がるという点で、解析的な情報と位相的な情報を結びつけます。これは、物理学において、局所的な場の性質が量子化された大域的な不変量として現れる現象（例えば、チャーン数やベリー位相）を理解する上で、中心的な役割を果たします。

アンブローズ-シン・ベルントの定理（ホロノミーと曲率の関係）

厳密な証明は高度な準備を要しますが、ホロノミー群と曲率テンソルの間には深遠な関係があります。簡単に言えば、制限ホロノミー群は、基点におけるすべての曲率テンソルによって「生成される」という定理が存在します。つまり、**局所的な曲率がゼロでないならば、その空間はホロノミーを持ち、閉ループに沿ってベクトルを平行移動させると向きが変わってしまう**、ということです。逆に、空間が平坦である（曲率がゼロである）ならば、ホロノミーは存在せず、どんな閉経路を辿ってもベクトルは元の向きに戻ります。この定理は、曲率という局所的な微分幾何学の概念と、ホロノミーという大域的な群論の概念を直接結びつけるものです。

証明の方針

アンブローズ-シン・ベルントの定理の証明は非常に技術的であり、通常は大学院レベルの微分幾何学で扱われます。主要なアイデアは、閉曲線に沿った平行移動を無限小の「面積」で分割し、その各面積要素におけるベクトルのずれが局所的な曲率テンソルによって記述されることを示します。これらの無限小のずれを連続的に合成していくことで、閉曲線全体でのホロノミー変換が、経路が囲む領域における曲率の積分として表現できることを示します。

具体的には、リー代数における生成元と、リー群としてのホロノミー群の関係を示します。曲率テンソルが、ホロノミー群のリー代数の元であると証明されるのです。これにより、局所的な曲率の情報から、大域的なホロノミーの構造を完全に決定できることが示されます。

アハラノフ

物理学においてホロノミーが最も明瞭に現れる現象の一つが、**アハラノフ＝ボーム効果**です。磁場が存在しない領域であっても、電子がソレノイドの周りを一周すると、その波動関数に位相差が生じます。この位相差は、閉経路に沿った電磁ポテンシャル（ゲージ接続）の線積分によって与えられます。

この現象をホロノミーの観点から見ると、電子の内部自由度（位相）が、磁場によって「ねじれた」空間を移動することで、閉ループを一周した際に元の位相に戻らない、と解釈できます。ここで、電磁ポテンシャルが接続の役割を果たし、磁場が曲率の役割を果たします。つまり、電子の波動関数の位相が、経路に沿って平行移動される中でずれていく現象は、まさにこのホロノミーによって説明されるのです。

物性物理学における**ベリー位相**も、本質的にはこのホロノミーの一種です。電子が運動量空間（ブリルアンゾーン）のようなパラメータ空間を閉ループに沿って移動する際、その量子状態（波動関数）が一周して戻ってきたときに獲得する位相のずれがベリー位相です。この位相のずれは、パラメータ空間上の「ベリー接続」と、そこから導かれる「ベリー曲率」によって決まります。ベリー曲率が非ゼロである場合、パラメータ空間は曲がっていると見なすことができ、その曲がりがホロノミーとしてベリー位相をもたらすのです。この位相は、チャーン数といった量子化されたトポロジカル不変量と深く関連しています。

このように、ホロノミーは、微小な曲がりの積み重ねが、最終的に大域的な測定可能な物理量として現れるという、幾何学と物理の間の深遠な繋がりを示す概念です。

ホロノミーの概念は、単に数学的な好奇心だけでなく、量子力学における位相の概念や、素粒子物理学における非可換ゲージ理論など、現代物理学の最前線で極めて重要な役割を果たしています。次に、これらの接続と曲率の概念が、具体的な物理理論においてどのように応用されているかを見ていきましょう。

5　主束と非可換ゲージ接続

ゲージ理論を幾何学的に記述するためには、「主束（principal bundle）」という概念が欠かせません。これまで私たちは、接続や共変微分といった概念を「多様体上のベクトル場」に対して定義してきましたが、ゲージ理論においては、「ゲージ群」が作用する空間構造そのものを扱う必要があり、そこで主束という枠組みが登場します。

定義 5.1: 主束

主束（principal G-束）とは、基底空間 M 上のファイバー束

$$G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} M$$

であり、構造群 G がファイバー $G \cong \pi^{-1}(x)$ 上に右から滑らかに自由かつ推移的に作用するものです。ここで P は全空間、M は基底空間、G はリー群です。

主束とは、「時空上の各点に内部自由度（ゲージ自由度）を貼り付けた構造」と理解できます。たとえば、$U(1)$ ゲージ理論では、各点に複素 1 次元の位相回転自由度（$e^{i\theta}$）が貼り付いており、$SU(2)$ ゲージ理論では、スピン 1/2 の内部自由度が貼り付いていると考えることができます。

5.1　局所座標とゲージ接続

主束の全空間 P には、G に関する右作用が定義されており、この構造を保ったまま「接続形式（connection form）」という 1 形式が定義されます。

定義 5.2: 主束上の接続

主束 P 上の接続とは、接空間 TP の各点において、垂直部分空間（G の軌道に沿う方向）と補空間となる水平部分空間を定める構造であり、その構造はリー代数値の 1 形式

$$\omega \in \Omega^1(P, \mathfrak{g})$$

によって与えられます。この ω を「接続形式」と呼びます。

この接続形式は、右 G 作用と整合的に変換し、ファイバー方向の情報を抽出します。

具体例：$U(1)$ と $SU(2)$ の接続

■$U(1)$ ゲージ理論（電磁気学）の場合： 電磁場のベクトルポテンシャル $A_\mu(x)$ は、$U(1)$ ゲージ理論における主束上の接続形式に対応します。この場合、接続形式 ω を時空 M に引き戻すと、通常の 1 形式 $A = A_\mu dx^\mu$ が得られます。共変微分は

$$D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu$$

の形になり、ゲージ変換 $A_\mu \mapsto A_\mu + \partial_\mu \theta$ に対して整合的に変換します。

■$SU(2)$ ゲージ理論（弱い相互作用）の場合： $SU(2)$ は非可換なリー群であり、接続形式は $\mathfrak{su}(2)$ 値の 1 形式として定義されます。局所的には、接続形式は 3 つのゲージ場成分 $A^a_\mu(x)$ $(a = 1, 2, 3)$ と生成元 T^a によって

$$A_\mu(x) = A^a_\mu(x) T^a$$

と書かれます。共変微分は

$$D_\mu = \partial_\mu - igA^a_\mu(x)T^a$$

となり、非可換性のために接続形式同士の交換子 $[A_\mu, A_\nu]$ が非自明になります。

定義 5.3: 曲率形式

主束上の接続形式 ω に対して、曲率形式 Ω は次の構造方程式で定義されます：

$$\Omega = d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega]$$

この Ω を基底空間に引き戻したものが、物理的な「場の強さ」（電磁場なら $F_{\mu\nu}$）に対応します。

注意

$U(1)$ の場合はアーベル群なので交換子が消え、曲率形式は単に $F = dA$ となります。一方で $SU(2)$ や $SO(3)$ のような非可換群では、交換子項が重要な寄与を持ちます。この違いが、非線形な自己相互作用や非可換ゲージ理論の豊かな構造を生み出します。

物理的意味とまとめ

このように、主束の言葉を用いることで、ゲージ理論は「空間上の各点に付随したゲージ自由度が、空間をまたいでどう変化するか」を記述する理論であると明確になります。そして、その変化を定めるのが「接続」、そのずれを測るのが「曲率」、閉ループを回ったときの効果が「ホロノミー」であり、これらはすべて主束という統一的な枠組みの中に収まっています。

この視点をもつことで、電磁気学のようなアーベルゲージ理論から、非可換ゲージ理論（$SU(2)$, $SU(3)$）やベリー接続のような物性理論への応用まで、統一的に理解できるようになります。

5.2 主束と随伴束の違い

主束 P は、構造群 G の右作用を持つファイバー束であり、そのファイバー自体が G と同型な群構造を持ちます。これに対して、**随伴束（adjoint bundle）**は、主束とそのリー代数表現（随伴表現）を用いて構成されるベクトル束であり、物理的には「ゲージ場の曲率」や「ゲージ変換の方向」に対応する重要な幾何学的対象です。

定義 5.4: 随伴束

主束 $P \to M$ と構造群 G の随伴表現 $\mathrm{Ad} : G \to \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ を用いて、随伴束 $\mathrm{Ad}(P)$ は次のように定義されます：

$$\mathrm{Ad}(P) := P \times_G \mathfrak{g}$$

ここで、$P \times \mathfrak{g}$ 上の等価関係は $(p \cdot g, X) \sim (p, \mathrm{Ad}_g X)$ によって与えられます。この構成によって、基底空間 M の各点 x に、リー代数 $\mathfrak{g}$ をファイバーとするベクトル束が対応します。

この定義からわかるように、**主束が「Lie 群を貼り付けた構造」なのに対して、随伴束は「Lie 代数を貼り付けた構造」**であるといえます。

たとえば、次のような具体例が考えられます。

■具体例 1：$U(1)$ ゲージ理論　$G = U(1)$ の場合、その Lie 代数は $\mathfrak{u}(1) \cong \mathbb{R}$ です。随伴表現は自明（恒等写像）なので、随伴束は

$$\mathrm{Ad}(P) \cong M \times \mathbb{R}$$

となり、**自明な一次元実ベクトル束**になります。このとき、曲率 2 形式（電磁場）は通常の $\mathbb{R}$ 値 2 形式として理解されます。

■具体例 2：$SU(2)$ ゲージ理論　$G = SU(2)$ の場合、$\mathfrak{g} = \mathfrak{su}(2) \cong \mathbb{R}^3$ であり、随伴表現は 3 次元の回転表現になります。したがって、随伴束は 3 次元ベクトル束となり、各点に「擬スピン」的な Lie 代数方向が張り付く構造を持ちます。

このとき、曲率形式 Ω は随伴束値の 2 形式、つまり「空間の各点で Lie 代数 $\mathfrak{su}(2)$ の値を持つ 2 形式」として扱われます。物理的には、これはゲージ場の場強テンソル（たとえば Yang-Mills テンソル）に相当します。

■具体例 3：$SO(3)$ ゲージ理論（等価な随伴束）　$SO(3)$ は $SU(2)/\mathbb{Z}_2$ と同型であり、同じく $\mathfrak{so}(3) \cong \mathbb{R}^3$ を持ちます。この場合も随伴束は 3 次元実ベクトル束であり、幾何学的には空間上の微小回転を記述する構造に対応します。

■重要な役割：随伴束上の接続と曲率　主束上の接続形式 ω は、随伴束の各ファイバーにおいて、Lie 代数 $\mathfrak{g}$ に沿った「回転の方向と大きさ」を指定するものです。曲率形式 Ω もまた、随伴束値の 2 形式であり、その成分は局所的に

$$\Omega = \frac{1}{2} F^a_{\mu\nu} T^a \, dx^\mu \wedge dx^\nu$$

と書かれます。ここで T^a は $\mathfrak{g}$ の基底、$F^a_{\mu\nu}$ は成分関数です。このように、随伴束はゲージ場の理論を数学的に定式化するための自然な舞台となっています。

注意

随伴束上の場は「ゲージ共変性」を持ち、ゲージ変換のもとで随伴表現に従って変換されます。この性質は、ゲージ理論の物理量が物理的に不変である（または共変的である）ことと密接に対応しています。

このように、主束が「幾何学的な対称性の枠組み」であるのに対して、随伴束はその「Lie 代数的な変化の方向」を記述する道具であり、両者はゲージ理論の幾何学的構造を構成する上で、車の両輪のような役割を果たしています。

5.3 カルタン構造方程式との接続

カルタン構造方程式は、主束上の接続形式が、幾何学的な構造（曲率やねじれ）とどのように関係しているかを記述する重要な式です。特に、**フレーム束**（orthonormal frame bundle）における接続と、局所直交基底に関する構造を結びつけます。

定義 5.5: カルタン構造方程式（第 1・第 2）

局所直交フレーム $\{e^a\}$ と接続 1 形式 $\omega^a{}_b$ に対して、カルタンの構造方程式は以下の 2 つです：

第 1 構造方程式（ねじれ形式）：

$$T^a = de^a + \omega^a{}_b \wedge e^b$$

第 2 構造方程式（曲率形式）：

$$\Omega^a{}_b = d\omega^a{}_b + \omega^a{}_c \wedge \omega^c{}_b$$

ここで T^a はねじれ 2 形式、$\Omega^a{}_b$ は曲率 2 形式を表します。

カルタン構造方程式は、**多様体上に定義された直交フレーム（局所基底）と接続形式の関係**を記述するものです。この方程式は二つ存在しますが、それぞれが異なる幾何学的構造を記述しています。

第 1 構造方程式の意味

第 1 構造方程式は、局所基底 e^a の外微分が接続形式 $\omega^a{}_b$ を用いてどのように表現されるかを示すものであり、ねじれ T^a の定義に対応します：

$$T^a = de^a + \omega^a{}_b \wedge e^b$$

この式は、**「基底ベクトルがどのようにずれているか」＝ねじれ**を表します。リーマン多様体においてねじれがゼロである場合、この式は**接続の対称性条件**に相当します（つまりレヴィ・チヴィタ接続になります）。

第 2 構造方程式の意味

第 2 構造方程式は、接続形式の外微分と自己の積（くさび積）から曲率 2 形式を定義するもので、

$$\Omega^a{}_b = d\omega^a{}_b + \omega^a{}_c \wedge \omega^c{}_b$$

という形をとります。これは**空間の曲がり（曲率）**を表し、リーマン多様体のリーマン曲率テンソルに相当します。

なぜ 2 つの構造方程式が必要なのか？

- 第 1 構造方程式は、「**接続が基底ベクトルにどう作用するか**」という意味で、**幾何構造の動力学的側面**を記述します。
- 第 2 構造方程式は、「**接続が自己どう変化するか**」を記述し、**構造の内部矛盾＝曲率**を表します。
- 特に、ねじれゼロの条件（リーマン幾何）では第 1 式が接続を一意に決定し、第 2 式が曲率を与えることで、幾何学が完全に定まります。

このように、**フレーム（局所座標）と接続（変化のルール）と曲率（歪みの測度）**を統一的に記述するためには、両方の構造方程式が必要なのです。

具体例：$G = SO(3)$ に対する構造方程式の計算

$SO(3)$ は、3 次元回転の Lie 群であり、球面 S^2 上のフレーム束に自然に現れます。以下に、球面上の直交基底 $e^1 = R\,d\theta$, $e^2 = R\sin\theta\,d\phi$ に対して構造方程式を使って接続と曲率を求めてみましょう。

■ステップ 1：de^a の計算

$$de^1 = 0, \quad de^2 = R\cos\theta\,d\theta \wedge d\phi$$

■ステップ 2：ねじれゼロの仮定 $T^a = 0$ より接続形式を決定　第 1 構造方程式より、

$$T^2 = de^2 + \omega^2{}_1 \wedge e^1 = 0 \Rightarrow \omega^2{}_1 = -\cos\theta\,d\phi$$

対称性より $\omega^1{}_2 = \cos\theta\,d\phi$ となります。

■ステップ 3：第 2 構造方程式から曲率を計算

$$\Omega^1{}_2 = d\omega^1{}_2 + \omega^1{}_3 \wedge \omega^3{}_2 = d(\cos\theta\,d\phi) = \sin\theta\,d\theta \wedge d\phi$$

これは球面上のリーマン曲率テンソルの成分に一致しており、ガウス曲率 $K = 1/R^2$ に対応します。

リーマン多様体との接続

このように、**リーマン計量とその接続から出発しても、構造方程式によって曲率・ねじれを導出できます**。特に、接続がレヴィ・チヴィタ接続（ねじれゼロかつ計量保存）であれば、構造方程式はリーマン幾何に自然に収束します。

これらの式は、一般のリーマン多様体における幾何構造の情報をコンパクトに表現しており、ゲージ理論における構造方程式の原型でもあります。

具体例：球面 S^2 上のカルタン形式

2 次元球面 S^2 を極座標 (θ, ϕ) で表現し、局所的なオルソンノーマル基底を次のように定めます：

$$e^1 = R\,d\theta, \quad e^2 = R\sin\theta\,d\phi$$

ここで R は球の半径です。これらはリーマン計量

$$g = (e^1)^2 + (e^2)^2 = R^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\phi^2)$$

を与える局所正規直交基底です。

このとき、第 1 構造方程式からねじれ形式 T^a を計算すると、

$$T^1 = de^1 + \omega^1{}_2 \wedge e^2, \quad T^2 = de^2 + \omega^2{}_1 \wedge e^1$$

が成り立ちます。

S^2 は**ねじれがゼロ**のリーマン多様体なので $T^a = 0$ を仮定して逆に接続形式を求めることができます。計算により、

$$\omega^1{}_2 = \cos\theta\,d\phi, \quad \omega^2{}_1 = -\cos\theta\,d\phi$$

が得られます。これを用いて第 2 構造方程式を使えば、曲率 2 形式は

$$\Omega^1{}_2 = d\omega^1{}_2 = \sin\theta\,d\theta \wedge d\phi$$

となり、これは球面上の**ガウス曲率**に一致します。

比較例：トーラス T^2 上の構造方程式

一方で、2 次元トーラス T^2 を $e^1 = dx, e^2 = dy$ としてパラメータ化すると、

$$de^1 = 0, \quad de^2 = 0$$

かつ平坦なので接続 1 形式もゼロ、

$$\omega^a{}_b = 0, \quad \Omega^a{}_b = 0$$

となります。したがって、トーラスではねじれも曲率も存在せず、構造方程式は自明に満たされます。

注意

曲率形式やねじれ形式は、接続形式の外微分とくさび積（非可換な積）によって定義されるため、**接続がゼロでも座標系が曲がっていれば（例：極座標系など）非自明な曲率が生じます。**

物理的視点との接続

- **ねじれ項** T^a は、物質の「せん断」や「転位」のような内部構造の不整合に対応し、エネルギー運動量テンソルと関係します。
- **曲率項** $\Omega^a{}_b$ は、重力場（一般相対論）やゲージ場の力の源に対応します。
- **構造方程式はゲージ理論の場の強さを幾何的に定式化する枠組み**であり、たとえば $F = dA + A \wedge A$ はその特殊例と見ることができます。

このように、構造方程式は、リーマン幾何学の純粋数学的枠組みだけでなく、ゲージ理論・重力理論・物性理論のいずれにも現れる、**幾何と物理をつなぐ基本言語**の一つといえます。

5.4 構造方程式とゲージ不変性の導出

カルタン構造方程式をゲージ理論の文脈に適用することで、接続形式と曲率形式が**ゲージ変換に対してどのように振る舞うか**を明示的に理解することができます。これは、**物理法則が「観測者の選び方（ゲージ）によらず同じ形式を保つ」という原理**の数学的表現でもあります。

接続形式とゲージ変換

主束 P の構造群 G に属するゲージ変換 $g : M \to G$ に対して、接続 1 形式 ω のゲージ変換則は

$$\omega \mapsto \omega^g := g^{-1}\omega g + g^{-1}dg$$

となります。これは、**ゲージ変換が接続の「比較ルール」を変形させること**を意味しています。この変換は **非線形**であり、G が非可換な場合に顕著に現れます（例：$SU(2)$ や $SU(3)$）。

曲率形式の導出と変換性

接続形式 ω に対して、構造方程式から曲率形式を定義します：

$$\Omega := d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega]$$

ゲージ変換 $\omega \mapsto \omega^g$ をこの式に代入すると、計算により

$$\Omega^g := d\omega^g + \frac{1}{2}[\omega^g, \omega^g] = g^{-1}\Omega g$$

が導かれます。

定理：曲率形式のゲージ共変性

曲率形式 Ω は、ゲージ変換のもとで

$$\Omega \mapsto \Omega^g = g^{-1}\Omega g$$

と変換されます。これは**随伴束上の 2 形式**として自然に振る舞っていることを意味します。

このように、**接続は非線形に変換**しますが、**曲率は共変的に変換**します。物理量として意味を持つのはこのような共変量や不変量です。

物理学におけるゲージ不変性の意味

- **ゲージ接続** A_μ**：**接続形式の局所表示であり、物理的には電磁ポテンシャルや SU(2) ゲージ場など。
- **曲率テンソル** $F_{\mu\nu}$**：**ゲージ接続から構成される場の強さ。物理的に直接観測できる。
- **ゲージ不変性：**物理的に可観測な量（力、位相、エネルギーなど）は、ゲージ変換の影響を受けない。

具体例 1：電磁場のゲージ不変性（$U(1)$）

$A_\mu \mapsto A_\mu + \partial_\mu\theta(x)$ のもとで、

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

は変化せず不変量になります。これは、電磁場 $\mathbf{E}$ や $\mathbf{B}$ がゲージ変換では変わらないことを意味します。

具体例 2：ベリー接続とベリー曲率（物性物理）

結晶中の電子状態 $|u_n(\mathbf{k})\rangle$ に対し、ベリー接続

$$\mathbf{A}_n(\mathbf{k}) = i \langle u_n(\mathbf{k})|\nabla_\mathbf{k}|u_n(\mathbf{k})|u_n(\mathbf{k})|\nabla_\mathbf{k}|u_n(\mathbf{k})\rangle$$

はゲージ変換 $|u_n(\mathbf{k})\rangle \mapsto e^{i\phi(\mathbf{k})}|u_n(\mathbf{k})\rangle$ により変化しますが、ベリー曲率

$$\mathbf{F}_n(\mathbf{k}) = \nabla_\mathbf{k} \times \mathbf{A}_n(\mathbf{k})$$

はゲージ**不変**です。

この不変性により、量子ホール効果におけるチャーン数

$$C_n = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathrm{BZ}} \mathbf{F}_n(\mathbf{k}) \cdot d\mathbf{S}$$

がトポロジカルな不変量として定義されます。

補足：ゲージ共変性と可観測量の原理

- **接続** A は「自由な基底選択」に依存するが、

- **曲率** F や線積分 $\int A$ は「物理的に意味を持つ不変量」または「共変量」として解釈されます。
- **ゲージ対称性は冗長な記述を許すが、そこから不変な構造を抽出するのが幾何学の役割**です。

注意：局所ゲージと大域構造

ゲージ変換はしばしば局所的に定義されますが、曲率やチャーン数のような不変量は空間全体（大域構造）に依存します。このような局所と大域の関係が、物性物理やトポロジカル相において非常に重要です。

このように、構造方程式から導かれる**ゲージ共変性**の構造は、現代物理の中核原理の一つであり、電磁気学・標準模型・物性理論・量子幾何など、さまざまな理論に共通して現れます。

5.5 主束上の接続と共変微分

主束 $P \xrightarrow{\pi} M$ 上に接続が与えられると、主束から誘導される随伴束やベクトル束に対して、**自然な共変微分（covariant derivative）**を定義することができます。この共変微分は、**異なる点にある「場」を比較するためのルール**であり、幾何学的にも物理的にも重要な構造です。

幾何的直感

多様体上に定義されたベクトル場やスピノル場などの場を「滑らかに微分」するには、空間が曲がっていることや、ゲージ自由度があることを考慮した「補正」が必要です。

主束上の接続は、その補正を与える基本的な幾何構造であり、**共変微分**はその接続を用いて定義されます。

定義 5.6: 主束に誘導される共変微分

束 $P \to M$ を構造群 G をもつとし、V をその線形表現空間（すなわち G が作用するベクトル空間）とします。このとき、主束 P から構成されるベクトル束

$$E = P \times_G V$$

の断面 $s \in \Gamma(E)$ に対して、接続 ω によって誘導される共変微分は次のように定義されます：

$$\nabla_X s := [p, D_X \tilde{s}] \in E_{\pi(p)} \tag{1}$$

ここで：

- X は基底多様体 M 上の接ベクトル（あるいはベクトル場）です。
- $\tilde{s}$ は s に対応する $P \times V$ 上の G 等変なリフトであり、G の作用と整合するように構成されます。
- $D_X \tilde{s}$ は、接続 ω によって定められる水平方向の微分（horizontal lift）です。

この構成により、E 上の共変微分 ∇ は、主束上の接続から自然に誘導されることがわかります。

この定義は、主束上の「滑らかな変化」をベースにしながら、ベクトル束に降ろしたものと理解できます。

局所表示

局所座標表示において、主束上の接続は G のリー代数値の 1 形式 $A_\mu^a(x)T^a$ として書かれます。このとき、ベクトル束上の場 $\phi(x)$ に対する共変微分は次のように与えられます：

$$\nabla_\mu \phi(x) = \partial_\mu \phi(x) + A_\mu^a(x)\rho(T^a)\,\phi(x)$$

ここで：

- $A_\mu^a(x)$ は接続の成分
- ρ は G の表現（たとえば基本表現、随伴表現）
- T^a は Lie 代数の生成元

この式は、物理でよく見る**ゲージ共変微分**の局所表示と一致しています。

物理的解釈

- **ゲージ理論における共変微分**：$\psi(x)$ をスピノルや場とすると、$\nabla_\mu \psi = \partial_\mu \psi + A_\mu \psi$ の形になります。
- **電磁場**（$U(1)$）：A_μ は電磁ポテンシャルであり、$\nabla_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu$
- **スピン軌道相互作用**（$SU(2)$）：ψ にスピン成分が含まれ、A_μ は SU(2) ゲージ場となります。

局所表示における共変微分の計算過程

共変微分 $\nabla_X s$ の抽象的な定義をもとに、実際の計算で用いられる局所座標表示を導出してみましょう。

局所座標系 (U, σ) を取り、主束の局所切断（セクション）$\sigma : U \to P$ を固定します。このとき、任意の断面 $s \in \Gamma(E)$ は、局所的に

$$s(x) = [\sigma(x), \phi(x)]$$

と書けます。ここで $\phi : U \to V$ は、ベクトル値関数です。

■ステップ 1：リフトの構成　断面 $s(x) = [\sigma(x), \phi(x)]$ に対応する G 等変なリフト $\tilde{s} : P \to V$ は、主束上の点 $p \in P$ に対して

$$\tilde{s}(p) := \rho(g^{-1})\phi(x), \quad \text{ただし } p = \sigma(x) \cdot g$$

で定義されます。ここで $\rho : G \to \mathrm{Aut}(V)$ は表現写像です。

■**ステップ 2：水平方向の微分**　水平方向のベクトル場 $X \in T_xM$ に沿って $\tilde{s}$ を微分すると：

$$D_X\tilde{s} = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \tilde{s}\,(p(t)) \quad \text{ただし } p(t) = \sigma(\gamma(t)) \cdot g$$

$\gamma(t)$ は M 上で $\gamma(0) = x$, $\gamma'(0) = X$ を満たす曲線です。

チェインルールと等変性の性質を使うと、

$$D_X\tilde{s} = \rho(g^{-1})\,(\partial_X\phi(x) + \rho_*(A(X))\phi(x))$$

が得られます。ここで：

- $A = \sigma^*\omega$ は主束上の接続 ω を局所切断 σ に引き戻した G のリー代数値 1 形式
- ρ_* は $\mathfrak{g}$ の元に対する微分表現 $\rho_* : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(V)$

■**ステップ 3：共変微分の最終形**　定義に従って、共変微分は

$$\nabla_X s(x) = [\sigma(x), \partial_X\phi(x) + \rho_*(A(X))\phi(x)]$$

局所座標系 (x^μ) を使えば、$X = \partial_\mu$ のとき：

$$\nabla_\mu\phi(x) = \partial_\mu\phi(x) + A_\mu^a(x)\rho(T^a)\phi(x)$$

という局所表示が得られます。

ここで：

- $A_\mu^a(x)$ は接続 1 形式の成分（$\mathfrak{g}$ の基底 $\{T^a\}$ に沿った展開）
- $\rho(T^a)$ はその表現での行列（たとえば $SU(2)$ ならパウリ行列の 1/2 倍）

結論：幾何構造から微分作用へ

このようにして、抽象的に定義された主束上の共変微分は、局所表示では以下のような構造に還元されます：

$$\nabla_\mu = \partial_\mu + A_\mu^a(x)\rho(T^a)$$

これは物理で見慣れた「ゲージ共変微分」の形式であり、幾何学と物理が一貫していることを示しています。

具体例：$SU(2)$ ゲージ場によるスピン 1/2 の共変微分

$SU(2)$ の基本表現における場 $\psi(x)$ に対して、共変微分は

$$\nabla_\mu\psi = \partial_\mu\psi + \frac{i}{2}A_\mu^a(x)\sigma^a\psi$$

となります。ここで σ^a はパウリ行列です。

この項は、**スピン軌道相互作用やスピンホール効果のゲージ理論的定式化**にそのまま現れます。

ベリー接続との比較

バンド理論におけるベリー接続も、波動関数の位相変化に対応する共変微分構造を与えるものです：

$$\nabla_{\mathbf{k}} |u_n(\mathbf{k})\rangle = \partial_{\mathbf{k}} |u_n(\mathbf{k})\rangle + i\mathbf{A}_n(\mathbf{k}) |u_n(\mathbf{k})\rangle$$

ここで $\mathbf{A}_n$ はベリー接続であり、空間変数を運動量空間に置き換えた、まさに「接続による共変微分」の一例といえます。

まとめ

主束上の接続は、対応するベクトル束や随伴束の上に自然な共変微分を導きます。この共変微分は、**幾何学的には空間構造の補正項を表し、物理学的には力や相互作用として現れる**重要な構造です。

今後の発展としては、共変微分を使った曲率の導出、ヤン・ミルズ理論、ファイバー束上の作用積分などへと接続されていきます。

6　スピン軌道相互作用のゲージ理論的定式化

スピン軌道相互作用（spin-orbit interaction, SOI）は、電子が持つスピンとその運動が結びつく相互作用であり、原子物理学や物性物理学、スピントロニクスにおいて重要な役割を果たしています。この相互作用は、**ゲージ理論的な枠組み**に自然に組み込むことができ、**スピン自由度に有効ゲージ場が作用している**と解釈することができます。

出発点：ディラック方程式と非相対論的極限

相対論的な電子の運動はディラック方程式で記述されます：

$$(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi = 0$$

ここで $D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu$ は U(1) ゲージ共変微分です。

この式を低エネルギー展開すると、**非相対論的シュレディンガー方程式**が現れ、次のようなスピン軌道相互作用が現れます：

$$H_{\text{SO}} = \frac{1}{4m^2c^2}\sigma \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{p})$$

ここで、σ はパウリ行列、$\mathbf{E} = -\nabla V$ は電場、$\mathbf{p}$ は運動量です。

この項は、**スピンが電場の中で回転する＝有効磁場を感じている**という解釈が可能であり、ゲージ構造に自然に対応します。

スピン自由度に作用する有効ゲージ場

スピンは $SU(2)$ 群の基本表現であるため、スピン自由度に作用するゲージ場を $\mathfrak{su}(2)$-値接続として導入することができます。

有効な共変微分は、

$$D_\mu = \partial_\mu - iA_\mu^a(\mathbf{x})\frac{\sigma^a}{2}$$

の形で記述され、A_μ^a は $SU(2)$ ゲージポテンシャル、σ^a はパウリ行列です。

定義 6.1: スピン軌道相互作用とゲージ接続

スピン軌道相互作用は、スピン空間の $SU(2)$ ゲージ接続 A_μ^a を通じて、電子の運動量とスピンの結合項として現れます。このとき、ゲージ曲率（場の強さ）は

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + \epsilon^{abc} A_\mu^b A_\nu^c$$

として与えられます。

このゲージ場は、スピンを運ぶ波動関数に対して Berry 接続的に作用し、電子のバンド構造や輸送特性に大きな影響を与えます。

6.1 SU(2) 接続と被相対論的極限：スピン軌道相互作用の導出

スピン軌道相互作用は、相対論的電子の運動方程式（ディラック方程式）から非相対論的極限をとることで、自然に現れる有効相互作用項です。ここでは、$U(1)$ および $SU(2)$ ゲージ接続を用いて、スピン軌道相互作用の導出過程を示します。

ステップ 1：ディラック方程式とゲージ共変微分

ディラック方程式は次のように与えられます：

$$(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi = 0, \quad D_\mu := \partial_\mu - ieA_\mu$$

ここで A_μ は $U(1)$ 電磁ポテンシャルです。今回は静電ポテンシャル $A_0 = \phi$, 磁場ベクトルポテンシャル $\mathbf{A}$ の形を仮定します。

ステップ 2：ディラックスピノルの 2 成分展開

4 成分スピノルを、上側の 2 成分（大成分）ψ_A、下側の 2 成分（小成分）ψ_B に分けて展開します：

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_A \\ \psi_B \end{pmatrix}, \quad \gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}$$

このとき、ディラック方程式は 2 つの式に分離されます：

$$\begin{aligned}
(i\partial_t - e\phi)\psi_A &= -i\sigma \cdot (\nabla - ie\mathbf{A})\psi_B + m\psi_A \\
(i\partial_t - e\phi)\psi_B &= -i\sigma \cdot (\nabla - ie\mathbf{A})\psi_A - m\psi_B
\end{aligned}$$

ステップ 3：被相対論的極限の導入

$m \gg |\mathbf{p}|$ の極限で、ψ_B を ψ_A に関して摂動的に解くと：

$$\psi_B \approx \frac{1}{2m}\sigma \cdot (\mathbf{p} - e\mathbf{A})\psi_A$$

これを上側の式に代入すると、次の 2 次の有効シュレディンガー方程式が得られます：

$$i\partial_t \psi_A = \left[\frac{1}{2m}(\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2 - e\phi - \frac{e\hbar}{2m}\sigma \cdot \mathbf{B} - \frac{e\hbar}{4m^2c^2}\sigma \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{p}) \right] \psi_A$$

ここで最後の項が**スピン軌道相互作用項**です。

ステップ 4：SU(2) ゲージ構造との対応

上記の有効ハミルトニアンには次のような項が現れます：

$$H_{\text{SOI}} = \frac{e\hbar}{4m^2c^2}\sigma \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{p})$$

これは、SU(2) ゲージ接続の曲率に起因する「スピン依存ローレンツ力」の効果と解釈できます。特に、SU(2) ゲージポテンシャルを

$$A_i^a = \epsilon_{aij} E^j$$

のように定義すると、ベリー接続のようにスピンと電場の結合を表現できます。

具体例：Rashba 型スピン軌道相互作用

2 次元電子系（2DEG）における Rashba 効果では、スピン軌道項は以下のように書かれます：

$$H_{\mathrm{Rashba}} = \alpha_{\mathrm{R}}(\sigma_x p_y - \sigma_y p_x)$$

この項は、以下の有効なゲージ場に対応します：

$$A_x^y = -\alpha_{\mathrm{R}}, \quad A_y^x = \alpha_{\mathrm{R}}, \quad \text{他はゼロ}$$

これは、**電子が 2 次元面を運動するときに、スピンが垂直電場によって回転する**という物理図式に一致します。

まとめ

このように、相対論的量子論から非相対論的極限を取ると、

- スピンは SU(2) 内部自由度として現れ
- 電場と運動量の組み合わせによりスピン依存のゲージ構造が生じ
- スピン軌道相互作用が自然に現れる

この過程は、SU(2) ゲージ理論の立場から SOI を幾何学的に理解する枠組みを提供します。

具体例：トポロジカル絶縁体とスピン Chern 数

強スピン軌道相互作用を持つ系では、電子バンドのベリー曲率が非自明な構造を持つことがあります。この場合、バンドごとのベリー曲率を通じてスピン Chern 数

$$C_{\mathrm{spin}} = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathrm{BZ}} \mathrm{Tr}\left(\mathbf{F}_{\mathrm{spin}}(\mathbf{k})\right)$$

が定義され、これはスピンホール伝導度と直接的に関係します。

トポロジカル絶縁体のような系では、このスピン Chern 数が非ゼロであり、**スピンのチャネルごとに反対向きのエッジモード（量子スピンホール効果）**が現れます。

幾何学的視点からの理解

スピン軌道相互作用は、空間的な回転構造とスピン自由度の接続を通じて、以下のように幾何学的に理解されます：

- **空間構造（結晶場・電場）**がスピン空間に非自明なゲージ場を誘導する。
- **電子波動関数のベリー接続**がスピン成分を含み、幾何学的位相（ベリー位相）やチャーン数を生む。
- **これらの構造は SU(2) 主束と随伴束の構造と整合的に定式化できる。**

物性理論への応用と展望

- **スピントロニクス：** スピン流の制御に有効ゲージ場の構造が重要。
- **スピンホール効果：** 外部電場に対してスピン流が横方向に流れる現象。SU(2) 曲率がその源。
- **トポロジカル相：** バンド構造中の Berry 曲率とスピン自由度の絡みが、新奇な量子相（Z2 絶縁体など）を生む。

このように、スピン軌道相互作用は単なる「微小相互作用」ではなく、**スピン自由度と空間幾何の結合としてのゲージ理論的構造**を持ち、現代物性理論の多くの現象を記述・予測するための共通言語となっています。

6.2 スピンホール効果と SU(2) ゲージ場

スピンホール効果とは、電場により駆動された電子流が、スピンの方向に依存して横方向に分離される現象です。これはまるで、通常のホール効果において荷電粒子が磁場によって横に曲げられるのと同様に、スピンに対して“有効な磁場”が働いているかのように見えます。

この“有効磁場”は、スピン軌道相互作用（SOI）によって自然に生じ、**SU(2) ゲージ理論の接続と曲率**として定式化できます。

物理的背景と発見史

スピンホール効果には 2 種類あります：

- **外因性（extrinsic）スピンホール効果**：スピン依存散乱によるもの（D'yakonov, Perel 1971）
- **内因性（intrinsic）スピンホール効果**：スピン軌道相互作用による有効帯構造のベリー曲率が起源（Murakami, Nagaosa, Zhang 2003）

本セクションでは、後者の内因性効果に注目します。

SU(2) ゲージ場による定式化

スピンを持つ電子に対して、運動量空間にベリー接続（SU(2) 接続）を導入すると、共変微分は以下のように記述されます：

$$\nabla_k = \partial_k - i\mathcal{A}_k^a \frac{\sigma^a}{2}$$

ここで、$\mathcal{A}_k^a$ はベリー接続（SU(2) ゲージ場）であり、曲率は

$$\mathcal{F}_{kl}^a = \partial_k \mathcal{A}_l^a - \partial_l \mathcal{A}_k^a + \epsilon^{abc} \mathcal{A}_k^b \mathcal{A}_l^c$$

で定義されます。

この曲率がスピン流を生み出す源となります。

スピン流と SU(2) 曲率の関係

スピンホール効果において、スピン流 $\mathbf{j}_i^a$ は SU(2) 曲率に比例すると考えられます：

$$\mathbf{j}_i^a \propto \epsilon_{ijk} \mathcal{F}_{jk}^a$$

この関係は、古典力学におけるローレンツ力

$$\mathbf{F} = q\,\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

のスピン版に対応し、スピンが非可換構造上で"曲がる"ことを表します。

具体モデル：Rashba ハミルトニアンと曲率の導出

Rashba 型 SOI を持つ 2 次元電子系では、ハミルトニアンは

$$H = \frac{p^2}{2m} + \alpha(\sigma_x p_y - \sigma_y p_x)$$

となります。

ベリー曲率の計算により、SU(2) 曲率の非ゼロ成分は

$$\mathcal{F}_{xy}^z = \frac{\alpha^2 m}{2(\alpha^2 p^2 + \epsilon)^2}$$

のように得られます（ϵ は正則化パラメータ）。

この成分がゼロでないため、スピン流は電場によって横方向に生成されます。

スピンホール伝導度とベリー曲率

SU(2) 曲率を運動量空間で積分することで、スピンホール伝導度 σ_{xy}^s が得られます：

$$\sigma_{xy}^s = \frac{e}{2\pi} \int_{\mathrm{BZ}} \mathrm{Tr}\left[\mathcal{F}_{xy}\right]\, d^2k$$

このように、スピンホール効果はベリー曲率の積分量、すなわち幾何学的特性量として現れ、トポロジカルな量（Chern 数）と類似の性質を持ちます。

応用と展望

スピンホール効果は、以下のような応用が期待されています：

- **スピントロニクス素子**：電流からスピンを生成・制御
- **スピン流による記録・読出し**（Magnetoresistive RAM など）
- **トポロジカル絶縁体との連携**：エッジスピン流の制御

まとめ

スピンホール効果は、スピン軌道相互作用による SU(2) ベリー曲率がスピンを横方向に曲げるという「スピン版ローレンツ力」として理解できます。これは、**ゲージ理論的な統一的構造**を物性物理の中で具体的に観測できる好例といえるでしょう。

6.3 スピン自由度とゲージ群の選択

スピン自由度を持つ物理系に対して、どのようなリー群を対称性群（ゲージ群）として採用するかは、そのスピンの性質や表現空間の次元によって決まります。

スピン 1/2 と SU(2), SO(3)

スピン 1/2 粒子は、2 次元複素線形表現空間を持ちます。これは $SU(2)$ の基本表現に対応し、その随伴表現は $SO(3)$ と同型になります。

- $SU(2)$ は**スピンの位相**も含むゲージ群であり、スピン 1/2 粒子に本質的です。
- $SO(3)$ はスピン 1（3 成分）系の対称性群に対応します。
- 実際には、$SU(2)$ が $SO(3)$ の被覆群であり、$\mathrm{Spin}(3) \simeq SU(2)$ という関係をもちます。

したがって、スピン角運動量を微分幾何学的に扱うには、**主束の構造群として** $SU(2)$ や $SO(3)$ を選ぶ必要があります。

高次スピンとゲージ群の拡張

スピンが 1 や 3/2 などより高次になると、対応する内部自由度の表現空間の次元も大きくなり、自然なゲージ群もより大きなものになります。

- **スピン 1（3 成分）**：$SO(3)$ や $SU(2)$ の随伴表現（3 次元）に対応。
- **スピン 3/2（4 成分）**：$SU(4)$ や $\mathrm{Spin}(5)$ などの群を必要とすることがある。
- **スピン F 系（$2F+1$ 成分）**：$SU(2F+1)$ や $U(N)$ が自然なゲージ群になる。

これらの高次スピン系は、冷却原子系やホールバンド縮退など、現実の物理系にしばしば現れます。

ゲージ束構造と表現空間

スピン系をゲージ幾何で扱う場合、スピン状態はベクトル束の断面（スピノル束や随伴束）と解釈され、ゲージ接続は Lie 群に属する主束上の接続として導入されます。

たとえば：

- スピン 1/2 なら $SU(2)$ 主束から誘導されるベクトル束
- スピン 1 なら $SO(3)$ 接続を用いた随伴束上の共変微分

この構造は、SU(N) ベリー接続、非可換ホロノミー、スピンカリュブレーションなどにも拡張されます。

物理的実例：多成分原子・高次スピン系

- **冷却原子系（^{87}Rb など）**：$F = 1$ や $F = 2$ の多成分ボース凝縮系では、内部状態空間が $SU(3)$ や $SU(5)$ 構造を持ちます。
- **半導体ホール系**：スピン 3/2 の Luttinger 模型では、$J = 3/2$ の表現が用いられ、4 成分の $SU(4)$ ベクトル構造になります。
- **カゴメ格子の磁性系**：スピン 1 やスピン 3/2 が空間格子と絡み合い、幾何学的フラストレーションと SU(N) 構造を生みます。

SU(N) ゲージ理論との接続

縮退バンドや多成分内部自由度を持つ場合、SU(N) ゲージ理論が自然な枠組みとして現れます：

- N 本の縮退バンドを $SU(N)$ ベクトルとして扱う
- ベリー接続は $\mathcal{A}_\mu \in \mathfrak{su}(N)$ として非可換構造を持つ
- 曲率 $\mathcal{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu \mathcal{A}_\nu - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu + [\mathcal{A}_\mu, \mathcal{A}_\nu]$
- 量子幾何テンソルや Berry 曲率の行列構造が現れ、多体物理やトポロジカル相の分類に使われる

このように、スピンの自由度に応じて適切なゲージ群を選ぶことは、物性理論におけるトポロジカル構造や幾何学的応答を正しく記述するための出発点となります。

6.4 もし電子のスピンが 3/2 だったら？

スピン 1/2 電子に対しては $SU(2)$ ゲージ群が自然な内部対称性を提供しますが、仮に電子がスピン 3/2（4 成分）を持っていたとしたら、ゲージ構造やスピン軌道相互作用（SOI）はどのように拡張されるでしょうか？

ここでは、スピン 3/2 粒子系に対するゲージ理論的構成と、有効ハミルトニアンの形を考察します。

スピン 3/2 とゲージ群

スピン 3/2 状態は $J = 3/2$ 表現に属し、4 次元複素ベクトル空間を基底に持ちます。そのため、自然なゲージ群としては：

- $SU(4)$：4 成分のユニタリ変換に対応
- $SO(5)$ **や** Spin(5)：$SU(4)$ と同型なコンパクト単純群
- Sp(4) や $U(4)$：保存すべき対称性や電荷に応じて選ばれる

実際の物理系（例：ホールバンドの Luttinger 模型）では、スピン 3/2 系に対して $SU(4)$ や

$SO(5)$ 構造が現れます。

共変微分と接続構造

$SU(4)$ ベクトル空間 V における場 $\Psi(x)$ に対して、共変微分は

$$\nabla_\mu \Psi = \partial_\mu \Psi + i A_\mu^a(x) T^a \Psi$$

と定義されます。

ここで：

- T^a は $\mathfrak{su}(4)$ の生成元（$a = 1, \ldots, 15$）
- $A_\mu^a(x)$ は対応するゲージ場の局所座標表示

この非可換構造により、ベリー接続やスピン軌道相互作用も行列として現れ、より複雑な結合を許容します。

スピン 3/2 ハミルトニアンの典型例：Luttinger 模型

半導体の価電子バンドでは、スピン軌道相互作用により $J = 3/2$ 状態が基底となり、その有効ハミルトニアンは次のように与えられます：

$$H = \frac{1}{2m}\left[\left(\gamma_1 + \frac{5}{2}\gamma_2\right)\mathbf{p}^2 - 2\gamma_2(\mathbf{p}\cdot\mathbf{J})^2\right]$$

ここで：

- γ_1, γ_2 は材料依存の Luttinger パラメータ
- $\mathbf{J}$ はスピン 3/2 の角運動量演算子（4×4 行列）
- 二番目の項がスピン軌道相互作用に対応

SU(4) ベリー接続と曲率構造

スピン 3/2 系では、バンドが 4 重縮退している場合、非可換なベリー接続を持ちます：

$$\mathcal{A}_\mu^{mn}(\mathbf{k}) = i \langle u_m(\mathbf{k})| \partial_\mu |u_n(\mathbf{k})\rangle, \quad m, n = 1, \ldots, 4$$

このとき曲率は

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu \mathcal{A}_\nu - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu + [\mathcal{A}_\mu, \mathcal{A}_\nu]$$

という非可換構造を持ち、幾何学的量（スピンホール伝導度、非可換チャーン数）に寄与します。

応用と展望

スピン 3/2 系に基づくゲージ理論は以下のような現象に対して有効です：

- **スピン 3/2 ホール効果**：Luttinger 液体の幾何学的応答

- **マルチバンドトポロジカル絶縁体**：4 バンド系での非アーベル位相構造
- **冷却原子系での SU(4) 対称性モデル**：人工ゲージ場と格子系の融合

特に、非可換ベリー構造が生成するスピン・軌道・格子の絡み合いは、新奇なトポロジカル相の源泉として注目されています。

まとめ

もし電子がスピン 3/2 であれば、自然なゲージ群は $SU(4)$ であり、共変微分・SOI・ベリー接続も非可換行列構造を持ちます。これはスピン自由度の拡張が、幾何構造や物理現象の豊かさに直結することを示す好例です。

6.5 縮退バンドに対する $SU(N)$ ゲージ理論

複数のバンドが縮退しているとき、それらを内部自由度として持つ N 次元の複素ベクトル空間とみなすことで、自然に $SU(N)$ **ゲージ構造**が現れます。このような状況では、波動関数の並進的な変化は SU(N) ベクトルの回転に対応し、非可換なベリー接続・曲率・チャーン数が導入されます。

縮退バンドと内部自由度の幾何学

N 本の縮退バンド $\{|u_n(\mathbf{k})\rangle\}_{n=1}^N$ を考えます。このとき、各 $\mathbf{k}$ における縮退部分空間は N 次元の複素ベクトル空間となり、SU(N) ゲージ構造に対応します。

$$\Psi(\mathbf{k}) = \sum_{n=1}^{N} c_n(\mathbf{k}) \, |u_n(\mathbf{k})\rangle \quad \Rightarrow \quad \Psi(\mathbf{k}) \mapsto U(\mathbf{k})\Psi(\mathbf{k}), \quad U(\mathbf{k}) \in SU(N)$$

この内部対称性は、波動関数を定義するベクトル束において、$SU(N)$ 主束の構造群として現れます。

SU(N) ベリー接続と曲率

ベリー接続は次のような $N \times N$ 行列として定義されます：

$$\mathcal{A}_\mu^{mn}(\mathbf{k}) = i \langle u_m(\mathbf{k}) | \partial_{k^\mu} u_n(\mathbf{k}) | u_m(\mathbf{k}) | \partial_{k^\mu} u_n(\mathbf{k}) \rangle$$

対応する曲率（場の強さ）は、非可換ヤン・ミルズ型の形になります：

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu \mathcal{A}_\nu - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu + [\mathcal{A}_\mu, \mathcal{A}_\nu]$$

これは $\mathfrak{su}(N)$ の値をとる 2 形式であり、局所ゲージ変換に対して共変変換します。

非可換チャーン数と幾何学的量

非アーベルな接続に対しても、次のようなトレースをとることでトポロジカル不変量が定義されます：

$$\mathrm{Ch}_1 = \frac{i}{2\pi} \int_{\mathrm{BZ}} \mathrm{Tr}[\mathcal{F}_{xy}] \, dk_x dk_y$$

さらに高次のチャーン類（2 次、3 次）も定義でき、4 次元や 6 次元トポロジカル物質の分類に寄与します。

具体例：カゴメ格子・マルチバンド系

- **カゴメ格子モデル**：3 バンド系における中間平坦バンドの縮退空間は SU(3) 構造を持つ。
- **Haldane-like マルチバンド系**：スピンと軌道を持つ複数バンド系で SU(4), SU(6) が現れる。
- **人工冷却原子格子**：内部状態数 N に応じた $SU(N)$ 構造がレーザー制御で実現可能。

これらの系では、ベリー曲率が非可換であるため、以下のような現象が観測されます：

- バンド間混合により幾何学的な位相積分が依存
- 非自明なホロノミーによる波束のトランスポート効果
- 多体状態における束縛・フラストレーションの発現

多体拡張：フラクショナル Chern 絶縁体との接続

SU(N) 構造を持つ縮退バンドに相互作用が加わると、多体トポロジカル状態（フラクショナル Chern 絶縁体）が現れます。

このとき、有効理論として次のような多成分 Chern-Simons 理論が導入されます：

$$\mathcal{L}_{\mathrm{eff}} = \sum_{I,J=1}^{N} \frac{K_{IJ}}{4\pi} a_I \wedge da_J - \sum_I \frac{q_I}{2\pi} A \wedge da_I$$

ここで：

- a_I は内部ゲージ場（縮退バンドの成分ごと）
- K_{IJ} は整数対称行列（統計位相を制御）
- q_I は外部電磁場との結合係数

この理論は、分数量子ホール効果の階層構造やトポロジカル縮退を SU(N) 幾何で記述する枠組みを提供します。

まとめ

縮退バンドを $SU(N)$ 構造のベクトル空間とみなすことで、非可換なベリー接続、幾何学的曲率、トポロジカル応答が統一的に記述されます。

これは、多バンド系・内部自由度・相互作用が絡み合った複雑系においても、幾何学・ゲージ理論の枠組みが有効に機能することを示しています。

7 物理における接続の応用

これまでの章では、接続が多様体の幾何学的構造を記述するための数学的な概念であることを学びました。共変微分、クリストッフェル記号、ねじれ、そして曲率といった概念は、空間の「歪み」や「曲がり」を定量的に捉えるために不可欠です。しかし、これらの抽象的な概念が、実際の物理現象とどのように結びついているのでしょうか。本章では、接続が現代物理学の主要な理論、特に一般相対性理論やゲージ理論において、いかに本質的な役割を果たしているかを具体的に見ていきます。

7.1 リーマン幾何学とレヴィ・チヴィタ接続

多様体上に「距離」や「角度」といった計量的な概念を導入することで、より豊かな幾何学が展開されます。これが「リーマン幾何学」です。リーマン幾何学は、アインシュタインの一般相対性理論において、時空の幾何学を記述するための数学的基盤となっています。

定義 7.1: リーマン計量

多様体 M 上の「リーマン計量」g とは、多様体の各点 p における接空間 T_pM 上の内積を滑らかに定める対称な二階共変テンソル場のことです。局所座標系 $(x^1, \ldots, x^n)$ では、次のように表されます。

$$g = \sum_{i,j} g_{ij}(x) dx^i \otimes dx^j$$

ここで $g_{ij}(x)$ は、計量テンソルの成分と呼ばれ、対称行列 $g_{ij} = g_{ji}$ を構成し、正定値であると仮定されます。

リーマン計量の役割

リーマン計量 g は、多様体上の任意の二つの接ベクトル $X = X^i\partial_i$ と $Y = Y^j\partial_j$ の内積を計算することを可能にします。

$$\langle X, Y\rangle_g = g(X, Y) = \sum_{i,j} g_{ij} X^i Y^j$$

これにより、多様体上でのベクトルの「長さ」やベクトル間の「角度」を定義できるようになります。また、曲線に沿った距離や、領域の体積なども、この計量を用いて計算されます。**リーマン計量は、多様体に「測れる」という具体的な幾何学的な構造を与えるものなのです。**

さて、リーマン計量を持つ多様体では、その計量構造と整合性を持つ、非常に特別な接続を定義することができます。それが「レヴィ・チヴィタ接続」です。

定義 7.2: レヴィ・チヴィタ接続

リーマン多様体 (M, g) 上の「レヴィ・チヴィタ接続」とは、次の二つの条件を満たす唯一の接続 ∇ のことです。

1. **ねじれなし**: 任意のベクトル場 X, Y に対して $T(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y] = 0$ が成り立ちます。すなわち、クリストッフェル記号が下二つの添字について対称です ($\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji}$)。
2. **計量適合性**: リーマン計量 g が共変微分のもとで「平行」である、すなわち任意のベクトル場 X, Y, Z に対して $\nabla_X g(Y, Z) = 0$ が成り立ちます。これは、計量テンソルの成分表示で書くと、$\nabla_k g_{ij} = 0$ となります。

レヴィ・チヴィタ接続の解釈

「ねじれなし」の条件は、接続が順序交換で生じるずれが純粋に座標系の取り方（リー括弧）に起因するものであり、接続自体に「ひねり」がないことを意味します。一方、「計量適合性」の条件は、**ベクトルを平行移動させてもその長さや、他のベクトルとの相対的な角度が変わらない**ことを保証します。これは、距離概念が定義された空間において、「まっすぐ」進むという自然な感覚を最もよく反映した接続と言えます。このような望ましい性質を持つ接続は、リーマン計量を与えれば一意に定まることが知られています。

レヴィ・チヴィタ接続のクリストッフェル記号

リーマン多様体 (M, g) におけるレヴィ・チヴィタ接続のクリストッフェル記号 Γ^k_{ij} は、計量テンソル g_{ij} とその偏微分を用いて次のように明示的に表されます。

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2} \sum_l g^{kl} \left(\frac{\partial g_{jl}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{il}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} \right)$$

ここで g^{kl} は、計量テンソル g_{kl} の逆行列の成分です。

証明の方針

この公式は、レヴィ・チヴィタ接続の二つの条件（ねじれなしと計量適合性）をクリストッフェル記号の言葉で書き下し、連立方程式を解くことで導出されます。
1. **ねじれなしの条件** ($\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji}$): これは直接クリストッフェル記号の対称性を意味します。2. **計量適合性の条件** ($\nabla_k g_{ij} = 0$): これを座標表示で書くと、

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} - \sum_l \Gamma^l_{ki} g_{lj} - \sum_l \Gamma^l_{kj} g_{il} = 0$$

この式を、添字を循環させて 3 つの式を作り、それらを足し引きすることで、上記のクリストッフェル記号の公式が得られます。具体的には、i, j, k を循環させた 3 つの式を (i, j, k), (j, k, i), (k, i, j) として足し合わせ、その後特定の項を引く操作を行います。

フラットな空間（ユークリッド空間）におけるレヴィ・チヴィタ接続

ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ をデカルト座標で考えると、計量テンソルは $g_{ij} = \delta_{ij}$（クロネッカーのデルタ）となります。つまり、成分はすべて定数（0 または 1）です。
このとき、上記のレヴィ・チヴィタ接続のクリストッフェル記号の公式を見ると、g_{ij} の偏微分はすべてゼロになります。

$$\frac{\partial g_{jl}}{\partial x^i} = 0, \quad \frac{\partial g_{il}}{\partial x^j} = 0, \quad \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} = 0$$

したがって、すべてのクリストッフェル記号 Γ^k_{ij} はゼロになります。

$$\Gamma^k_{ij} = 0$$

これは、ユークリッド空間が「平坦」であり、そこでの「接続」が自明である（ベクトルの向きを補正する必要がない）ことを意味します。この結果は、前節で共変微分の例としてユークリッド空間を扱ったときと矛盾しません。**レヴィ・チヴィタ接続は、空間が平坦であれば、通常のベクトル解析における微分と一致する形で「補正が不要」であることを示しているのです。**

曲がった空間（球面）におけるレヴィ・チヴィタ接続

球面 S^2 のような曲がった空間では、計量テンソル g_{ij} は座標によって変化する関数となります（例えば、極座標を用いると、計量成分には r や θ の関数が含まれます）。この場合、g_{ij} の偏微分は一般にゼロではありません。
その結果、レヴィ・チヴィタ接続のクリストッフェル記号 Γ^k_{ij} は非ゼロの値をとります。これらの非ゼロのクリストッフェル記号が、球面上の測地線（最短経路、大円）や、球面上でベクトルを平行移動させたときに生じる向きのずれ（ホロノミー）を正確に記述します。
物理的に言えば、**一般相対性理論において、質量やエネルギーの存在が時空の計量テンソル $g_{\mu\nu}$ を変化させます。この変化した計量テンソルからレヴィ・チヴィタ接続が計算され、その接続が時空の曲率（重力）を生み出します。**つまり、重力場の中での粒子の運動や光の進路の曲がりは、このレヴィ・チヴィタ接続が定める時空の幾何学によって記述されるのです。この意味で、接続は重力という物理現象を幾何学的な言葉で表現するための、最も基本的なツールとなっています。

7.2　一般相対性理論と重力

前節では、リーマン多様体上で一意に定まるレヴィ・チヴィタ接続の概念を学びました。この接続は、計量テンソルから直接導かれ、空間の幾何学的な性質（距離や角度）と密接に結びついています。アインシュタインの一般相対性理論は、このリーマン幾何学を物理に応用し、重力の本質を「時空の曲がり」として記述した画期的な理論です。

一般相対性理論では、私たちの住む 3 次元空間と 1 次元の時間を合わせた 4 次元の「時空」が、

もはや平坦なユークリッド空間（またはミンコフスキー空間）ではなく、質量やエネルギーの分布によって「曲がる」多様体であると考えます。この時空の曲がりこそが、私たちが経験する重力現象の正体なのです。

重力と時空の曲がり

ニュートン力学では、重力は物体間に働く「力」として記述されました。しかし、一般相対性理論では、太陽の周りを惑星が楕円軌道で公転するのは、太陽という巨大な質量が周囲の時空を歪ませ、惑星はその「歪んだ時空」の中をあたかも「まっすぐ」進んでいる結果である、と解釈されます。まるで、ボールがピンと張ったゴム膜の上で窪みを作り、その窪みに沿って他の小さな物体が転がるようなイメージです。この「まっすぐ進む」という概念が、多様体上の測地線に対応します。

定義 7.3: 測地線

ーマン多様体上の曲線 $\gamma(t)$ が「測地線」であるとは、その接ベクトル場 $\dot{\gamma}(t)$ が自身に沿って平行移動すること、すなわち次の方程式を満たすことと定義されます。

$$\nabla_{\dot{\gamma}(t)}\dot{\gamma}(t) = 0$$

測地線の意味

この測地線の方程式は、物理的には「外部からの力が作用しない粒子がたどる経路」を意味します。重力が「力」ではなく時空の幾何学であるという一般相対性理論の考え方によれば、自由落下する物体や、宇宙空間を運動する惑星は、それぞれが置かれた時空の曲がりに応じて、最も「まっすぐな」経路（測地線）をたどっているのです。光でさえも、質量を持たないにもかかわらず重力によって経路が曲げられるのは、光が時空の測地線に沿って進むためと説明されます。

測地線方程式の座標表示

局所座標系 (x^0, x^1, x^2, x^3)（x^0 は時間座標、x^1, x^2, x^3 は空間座標）において、測地線の方程式はクリストッフェル記号 $\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}$ を用いて次のように表されます。

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} + \sum_{\alpha,\beta} \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\tau}\frac{dx^\beta}{d\tau} = 0$$

ここで τ は固有時（時間のような役割を果たすパラメータ）であり、μ, α, β は 0 から 3 までの時空の添字です。

証明の方針

これは、測地線の定義 $\nabla_{\dot\gamma(t)}\dot\gamma(t) = 0$ を、前節で学んだ共変微分の座標表示に代入することで得られます。曲線 $\gamma(t)$ の接ベクトル $\dot\gamma(t)$ の成分を $\dot x^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\tau}$ と書くと、共変微分は

$$(\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma)^\mu = \sum_\alpha \dot x^\alpha \left(\frac{\partial \dot x^\mu}{\partial x^\alpha} + \sum_\beta \Gamma^\mu_{\alpha\beta}\dot x^\beta \right)$$

となります。ここで、時間 τ についての全微分を考えると $\frac{\partial \dot x^\mu}{\partial x^\alpha}\dot x^\alpha = \frac{d}{d\tau}\left(\frac{dx^\mu}{d\tau}\right) = \frac{d^2x^\mu}{d\tau^2}$ です。したがって、測地線の方程式は上記の形になります。この式は、**粒子の運動が、時空の幾何学（クリストッフェル記号によって表現される曲がり）によって直接決定される**ことを示しています。

重力レンズ効果

一般相対性理論の有名な予測の一つに、重力レンズ効果があります。これは、遠方の銀河から発せられた光が、その手前にある巨大な質量（例えば、別の銀河や銀河団）の重力によって、あたかもレンズを通ったかのように経路を曲げられ、地球上の観測者からは複数の像として見えたり、歪んだ像として見えたりする現象です。

この現象は、光が質量によって発せられる「重力」という力によって曲げられるのではなく、**質量によって歪んだ時空の「測地線」に沿って進むために、光の経路が曲がる**と説明されます。このとき、時空の歪みは計量テンソル $g_{\mu\nu}$ として記述され、この計量から計算されるクリストッフェル記号 $\Gamma^\mu_{\alpha\beta}$ が、光の経路の曲がりを正確に予測します。観測される重力レンズの像は、**曲がった時空における接続の存在とその効果を、視覚的に示す最も劇的な例**と言えるでしょう。

このように、レヴィ・チヴィタ接続は、一般相対性理論において重力の本質を幾何学的に記述するための核となる概念です。時空の計量が物質によって決定され、その計量から接続が導かれ、その接続が粒子の運動経路（測地線）を決定するという、エレガントな枠組みを構築しています。

7.3 ゲージ理論とゲージ接続

これまでの議論では、時空の幾何学、特に重力現象を記述するレヴィ・チヴィタ接続に焦点を当ててきました。しかし、接続の概念は、素粒子物理学の「ゲージ理論」という全く異なる分野においても、その中心的な役割を担っています。ゲージ理論は、電磁気力、弱い力、強い力といった基本的な相互作用を統一的に記述するための枠組みです。

内部自由度と対称性

量子力学において、電子などの素粒子は、位置や運動量といった外部自由度だけでなく、スピンや電荷といった「内部自由度」を持っています。例えば、電子の波動関数には位相の不

定性があります（$|\psi\rangle \sim e^{i\phi}|\psi\rangle$）。物理法則は、この位相をどのように選んでも変わらないはずです。このような性質を「対称性」と呼びます。
もしこの対称性が、時空の各点で独立に（局所的に）位相を変換しても物理法則が変わらないという性質を持つ場合、それを「局所ゲージ対称性」と呼びます。ゲージ理論は、この局所ゲージ対称性を満たすように物理法則を構築することで、自然界の基本的な相互作用が導かれる、というアイデアに基づいています。

定義 7.4: ゲージ接続

ージ理論において、局所ゲージ対称性を保つために導入されるのが「ゲージ接続」です。これは、時空の各点に付随する粒子の内部自由度（例えば、位相）を、隣り合う点で「比較する」ためのルールを与えるものです。
具体的には、ある内部自由度を持つ場 $\psi(x)$ を時空上で微分する際に、通常の偏微分 ∂_μ の代わりに、「共変微分」D_μ を用います。この共変微分は、次のように定義されます。

$$D_\mu\psi(x) = (\partial_\mu - igA_\mu(x))\,\psi(x)$$

ここで、g は結合定数、$A_\mu(x)$ が「ゲージ接続」（またはゲージポテンシャル）と呼ばれる量です。$A_\mu(x)$ は、時空の各点で作用するゲージ変換に応じて変化し、この変化が偏微分に補正項として加わることで、局所ゲージ対称性が保たれます。

ゲージ接続の役割

ゲージ接続 $A_\mu(x)$ は、レヴィ・チヴィタ接続が時空の幾何学的な「歪み」を補正するのと同様に、**粒子の内部自由度が時空上で「局所的に異なる向き」を持つことによって生じるずれを補正する**役割を担っています。これにより、時空のどの点でも、内部自由度の「向き」が揃っているかのように場を微分することが可能になります。この補正項 $A_\mu(x)$ が、物理的には「ゲージ場」（例えば、電磁場におけるベクトルポテンシャル）として現れるのです。

ゲージ曲率（場の強さ）

ゲージ接続 $A_\mu(x)$ からは、「ゲージ曲率」と呼ばれる量が定義されます。これは、ゲージ接続が定める「空間の曲がり」の度合いを表し、物理的にはゲージ場の「強さ」に対応します。電磁気学の場合、電場 $\boldsymbol{E}$ や磁場 $\boldsymbol{B}$ に相当します。ゲージ曲率 $F_{\mu\nu}$ は、共変微分の非可換性から導かれ、次のように定義されます。

$$F_{\mu\nu} = \frac{1}{ig}[D_\mu, D_\nu] = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ig[A_\mu, A_\nu]$$

特に、ゲージ群が可換な $\mathrm{U}(1)$ 群（電磁気学の場合）では、$[A_\mu, A_\nu] = 0$ となり、$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ となります。これは電磁場テンソルに他なりません。

証明の方針

ゲージ曲率の定義は、共変微分 D_μ が一般に交換しないこと（$[D_\mu, D_\nu] \neq 0$）から導かれます。$[D_\mu, D_\nu]\psi = (D_\mu D_\nu - D_\nu D_\mu)\psi$ 各項を展開し、通常の偏微分の交換性やゲージ変換の性質を用いることで、上記の式が得られます。非可換ゲージ群（例えば、強い力における SU(3)）の場合、$[A_\mu, A_\nu]$ の項が非ゼロとなり、これはゲージ場自身が相互作用を持つことを示唆しています。

電磁気学とゲージ接続

電磁気学は、最も身近なゲージ理論です。電子の波動関数 ψ は、時空の各点で局所的な位相変換 $\psi(x) \to e^{i\alpha(x)}\psi(x)$ に対して不変でなければなりません。この対称性を保つために、ベクトルポテンシャル $A_\mu(x)$ がゲージ接続として導入されます。
電磁場の共変微分は、$D_\mu\psi = (\partial_\mu - ieA_\mu)\psi$ となります。ここで e は電気素量です。電磁場テンソル $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ は、ゲージ曲率に他なりません。このゲージ曲率は、電場 $\boldsymbol{E}$ や磁場 $\boldsymbol{B}$ を与え、これらの場が粒子に力を及ぼすことで相互作用が生じます。
電磁気学におけるゲージ接続は、時空上の電子の電荷という「内部自由度」の向きを整合させるための補正項であり、それが物理的な力（電磁力）として現れるという点で、接続の概念が物理法則の根本にあることを示しています。この視点は、単に電磁力を記述するだけでなく、より高次の対称性を持つ素粒子の相互作用（弱い力、強い力）を記述する「非アーベルゲージ理論」へと発展しました。

7.4 ベリー接続と物性物理

ゲージ理論の概念は、素粒子物理学だけでなく、凝縮系物理学の分野、特に「トポロジカル物性」の研究においても極めて重要な役割を果たしています。ここでは、電子状態が記述される「パラメータ空間」という抽象的な空間における接続の概念、すなわち「ベリー接続」についてご紹介します。

パラメータ空間と量子状態

物性物理学では、結晶中の電子状態は、波数ベクトル $\boldsymbol{k}$ などの「パラメータ」に依存して変化します。これらのパラメータが張る空間（例えば、ブリルアンゾーン）は、多くの場合、トーラスのような閉じた多様体として考えることができます。このパラメータ空間の各点には、その点における電子の量子状態（波動関数）が対応しています。つまり、私たちは、**パラメータ空間の各点に量子状態という「内部自由度」が乗っている**状況を考えているのです。

定義 7.5: ベリー接続

ミルトニアン $H(\boldsymbol{R})$ がパラメータの組 $\boldsymbol{R} = (R_1, R_2, \dots)$ に依存している状況を考えます。このとき、パラメータ空間上の「規格化された固有状態」を $|u(\boldsymbol{R})\rangle$ とします。この量子状態に対して定義されるのが「ベリー接続」$\mathcal{A}(\boldsymbol{R})$ です。

$$\mathcal{A}(\boldsymbol{R}) = i\langle u(\boldsymbol{R})|d|u(\boldsymbol{R})\rangle$$

ここで d は外微分を表し、$\mathcal{A}(\boldsymbol{R})$ はパラメータ空間上の 1-形式として定義されます。成分表示では $\mathcal{A}_i = i\langle u(\boldsymbol{R})|\frac{\partial}{\partial R_i}|u(\boldsymbol{R})\rangle$ となります。

ベリー接続の役割

ベリー接続は、ゲージ理論におけるゲージ接続と全く同じ数学的構造を持っています。これは、**パラメータ空間上で量子状態を移動させる際に、その波動関数の位相がどのように「ずれる」かを記述する補正項**と解釈できます。パラメータ空間の隣り合う点で量子状態を比較する際に生じる、波動関数の位相の自由度に対応する「ねじれ」を補正しているのです。この接続は、電磁気学におけるベクトルポテンシャル A_μ のアナロジーで理解できます。

ベリー曲率

ベリー接続から定義される「ベリー曲率」$\mathcal{F}(\boldsymbol{R})$ は、パラメータ空間における量子状態の「曲がり」の度合いを表し、電磁気学における磁場 $\boldsymbol{B}$ に相当します。これは、ベリー接続の「外微分」として定義されます。

$$\mathcal{F}(\boldsymbol{R}) = d\mathcal{A}(\boldsymbol{R})$$

成分表示では $\mathcal{F}_{ij} = \frac{\partial \mathcal{A}_j}{\partial R_i} - \frac{\partial \mathcal{A}_i}{\partial R_j}$ となります。

証明の方針

ベリー曲率の定義は、ベリー接続を 1-形式と見なし、その外微分を取ることで直接得られます。これは、ゲージ曲率の定義においてゲージ群が可換（U(1)）である場合の形式と一致します。この $\mathcal{F}$ は 2-形式として振る舞い、パラメータ空間の微小な「面積」を横切る際に生じる位相のずれを示します。

量子ホール効果とチャーン数

ベリー曲率の最も重要な応用例の一つが、**整数量子ホール効果**です。二次元電子系において、外部磁場を印加すると、ホール伝導率 σ_{xy} がプランク定数 h と電気素量 e のみに依存する普遍的な値の整数倍となる現象です。

$$\sigma_{xy} = N\frac{e^2}{h}, \quad N \in \mathbb{Z}$$

この驚くべき整数 N は、「チャーン数」と呼ばれ、パラメータ空間であるブリルアンゾーン上でベリー曲率を積分することで得られます。

$$C_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{BZ} \mathcal{F}$$

この積分値が常に整数になるのは、チャーン数が、根源的にはパラメータ空間の「トポロジー」(位相的な性質、例えば「穴の数」) によって決まる整数係数の不変量であるためです。**ベリー曲率はパラメータ空間の局所的な幾何学を記述しますが、その積分値であるチャーン数は、パラメータ空間の「形」という大域的な情報を示します。**
これは、**パラメータ空間という抽象的な空間が「曲がっている」ために、電子の量子状態が、その曲がりの影響を受けて、閉経路を一周すると元の状態とは異なる位相を獲得する**(ホロノミー) ことを意味します。この位相のずれが集積された結果がチャーン数として量子化され、マクロな電気伝導現象として観測されるのです。このように、ベリー接続とベリー曲率は、物性物理学におけるトポロジカル不変量の起源を幾何学的に理解するための強力な言語となっています。