ド・ラームコホモロジー
– 物性物理学の幾何学的な記述に向けて –

ほの

2025 年 7 月 6 日

概要

このノートは、ド・ラームコホモロジーという微分幾何学の概念が、現代物性物理学、特にトポロジカル物性の記述において、いかに強力な言語として機能するかを解説することを目的とする。本稿では一貫して「物性物理学とは、コンパクトなパラメータ空間上で展開されるゲージ理論である」という視点を採用する。この視点に立つことで、ベリー位相やチャーン数といった物理量が、微分形式やコホモロジーといった数学的対象として、いかに自然に現れるかを示す。具体例として、ベクトル解析の再定式化から始め、微分形式、閉形式、完全形式の定義を経て、ド・ラームコホモロジー群を構成する。最終的に、物理現象の背後にある幾何学的・位相的な構造を、数学的に厳密かつ明快に捉えるための道筋を示す。

目次

1　イントロダクション — なぜコホモロジーを学ぶのか

現代物性物理学、特にトポロジカル相の研究において、微分幾何学や代数トポロジーの概念は不可欠な道具となっています。一見すると物理現象とはかけ離れた抽象的な数学が、なぜ物性の理解に貢献するのでしょうか。本章ではその動機付けとして、本稿を貫く一つの視点を提示します。それは、

本稿のスタンス

物性物理学とは、コンパクトなパラメータ空間上で記述される、一種のゲージ理論である。

というものです。この視点に立つとき、物理系の普遍的な性質（トポロジカル不変量）が、パラメータ空間の「形」、すなわちトポロジーを反映したものであることが明らかになります。ド・ラームコホモロジーは、その「形」を解析するための最も強力な言語の一つなのです。

1.1　幾何学とトポロジー、そして物理学

物性物理学が扱うのは、膨大な数の粒子（電子など）からなる多体系です。その系の状態は、多くの場合、いくつかの連続的な変数、すなわち**パラメータ**によって特徴づけられます。最も代表的なパラメータは、結晶中の電子状態を分類する**波数ベクトル $\boldsymbol{k}$** でしょう。その他にも、外部から印加する磁場 $\boldsymbol{B}$ や、ハミルトニアンの相互作用項の強さなどもパラメータと見なせます。

これらのパラメータが動くことのできる範囲全体を、**パラメータ空間**と呼びます。例えば、一次元結晶を考えれば、波数 k は周期的境界条件 $k \sim k + 2\pi/a$（a は格子定数）を満たします。これは、パラメータ空間が直線 $\mathbb{R}$ ではなく、円周 S^1 であることを意味します。同様に、二次元結晶の波数空間（ブリルアンゾーン）はトーラス T^2 と同一視できます。

パラメータ空間の例

- **1 次元結晶**: ブリルアンゾーンは円周 S^1
- **2 次元結晶**: ブリルアンゾーンはトーラス $T^2 = S^1 \times S^1$
- **3 次元結晶**: ブリルアンゾーンは 3 次元トーラス T^3

重要なのは、これらのパラメータ空間 S^1, T^2, T^3 がいずれも「穴」を持ち、かつコンパクト（有界で閉じている）な多様体であるという点です。

「物性物理学がパラメータ空間上のゲージ理論である」とはどういうことでしょうか。量子力学において、系の状態は波動関数 $|\psi\rangle$ で記述されますが、これには位相の不定性 $|\psi\rangle \sim e^{i\phi}|\psi\rangle$ があります。この位相の自由度、すなわち $U(1)$ 自由度が、パラメータ空間の各点に付随していると考えるのです。パラメータ空間上で波動関数がどのように変化していくかを記述することが、まさにゲージ理論に他なりません。このとき、パラメータ空間の幾何学的、あるいは位相的な性質（穴の有無など）が、波動関数の大域的な振る舞いに強い制約を課し、結果として測定可能な物理

量に反映されます。これが、物性物理に幾何学やトポロジーが登場する核心的な理由です。

1.2 コホモロジーが活躍する物理の舞台：ベリー位相とチャーン数

パラメータ空間上のゲージ理論の典型例が、**ベリー位相** (Berry phase) です。系のハミルトニアン $H(\boldsymbol{R})$ が、あるパラメータの組 $\boldsymbol{R} = (R_1, R_2, \dots)$ に依存しているとしましょう。このパラメータを断熱的に（十分にゆっくりと）変化させて、パラメータ空間内のある閉曲線 C に沿って一周させるとき、系の波動関数は元の状態には戻らず、ある位相を獲得します。この位相の一部は、パラメータの変化速度に依存しない、経路 C の幾何学的な性質のみで決まる普遍的な量となります。これがベリー位相です。

この現象は、電磁気学におけるアハラノフ＝ボーム効果と極めてよく似た構造を持っています。アナロジーは以下の対応で明確になります。

- **ベリー接続 (Berry connection) $\iff$ ベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$**
- **ベリー曲率 (Berry curvature) $\iff$ 磁場 $\boldsymbol{B}$**

パラメータ $\boldsymbol{R}$ に依存する規格化された固有状態を $|u(\boldsymbol{R})\rangle$ とすると、ベリー接続 $\mathcal{A}$ とベリー曲率 $\mathcal{F}$ は次のように定義されます。

定義 1.1: ベリー接続とベリー曲率

パラメータ空間上の規格化された固有状態 $|u(\boldsymbol{R})\rangle$ に対し、**ベリー接続** $\mathcal{A}$ と**ベリー曲率** $\mathcal{F}$ を次式で定義する。

$$\mathcal{A}(\boldsymbol{R}) = i \langle u(\boldsymbol{R})| \, d \, |u(\boldsymbol{R})\rangle$$
$$\mathcal{F}(\boldsymbol{R}) = d\mathcal{A}(\boldsymbol{R})$$

記法について

ここでは、今後の議論を見据え、微分形式の記法 d を先取りして用いました。$\mathcal{A}$ は **1-形式**、$\mathcal{F}$ は **2-形式**と呼ばれる対象であり、$\nabla_{\boldsymbol{R}}$ を用いた通常のベクトル解析の言葉では、$\mathcal{A}_i = i \langle u| \frac{\partial}{\partial R_i} |u\rangle$ や $\mathcal{F}_{ij} = \frac{\partial \mathcal{A}_j}{\partial R_i} - \frac{\partial \mathcal{A}_i}{\partial R_j}$ と書かれます。詳細は次章で明らかにします。

ベリー曲率 $\mathcal{F}$ を、閉じた 2 次元のパラメータ空間（例えばブリルアンゾーンであるトーラス T^2）上で積分した量は、**チャーン数** (Chern number) と呼ばれ、物理的に極めて重要な意味を持ちます。

$$C_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{T^2} \mathcal{F}$$

驚くべきことに、この積分値は常に**整数**になることが知られています。この整数は、系のトポロジカルな性質を特徴づける不変量であり、例えば量子ホール効果におけるホール伝導度を決定します。

局所的に定義される量（ベリー曲率）を、空間全体で積分すると、なぜ普遍的な整数値（トポ

ロジカル不変量）が現れるのでしょうか？ この問いに答えるための数学的枠組みが、まさに**ド・ラームコホモロジー**なのです。コホモロジー理論は、局所的な情報（微分）と大域的な情報（積分、トポロジー）を結びつけるための理論体系に他なりません。

1.3 微分形式への第一歩：物理的直感から

前節で見たように、ベリー接続や曲率といった物理の概念は、幾何学的な対象と深く関わっています。これらの概念を厳密かつ座標系の選び方によらない内在的な形で扱うために、我々は**微分形式** (differential form) という数学の言語を導入します。

微分形式は、ベクトル解析における grad, div, curl といった演算を統一し、高次元へ一般化するものです。電磁気学のマクスウェル方程式が良い例です。

- スカラーポテンシャル ϕ や、関数 f は **0-形式**
- 電場 $\boldsymbol{E}$ やベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ のように、線積分 $\int_C \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{l}$ される量は **1-形式**
- 磁場 $\boldsymbol{B}$ のように、面積分 $\int_S \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{S}$ される量は **2-形式**
- 電荷密度 ρ のように、体積分 $\int_V \rho dV$ される量は **3-形式**

と見なすことができます。この言語を用いれば、複雑に見えた物理法則が、驚くほど簡潔で美しい一つの数式 $dF = J$ にまとまることさえあります。

次章からは、この強力な言語である微分形式を基礎から学び、ド・ラームコホモロジーの定義へと進んでいきましょう。

2 微分形式の基礎

本章では、ド・ラームコホモロジーを構成するための基本的な構成要素である**微分形式**と、その上の演算（**外微分**）を導入します。難解な数学に見えるかもしれませんが、その本質は、物理学者にとって馴染み深いベクトル解析の概念を、より系統的かつ普遍的な形で再構成することにあります。この新しい言語を身につけることで、物理法則の背後にある幾何学的な構造が、より一層明確になることを目指します。

2.1 ベクトル解析の再出発：$\mathrm{grad}, \mathrm{curl}, \mathrm{div}$ の新しい姿

学部初年級で学ぶベクトル解析には、3 つの基本的な微分演算が登場しました。スカラー場 f の勾配 $\mathrm{grad}f$、ベクトル場 $\boldsymbol{A}$ の回転 $\mathrm{curl}\boldsymbol{A}$、そしてベクトル場 $\boldsymbol{B}$ の発散 $\mathrm{div}\boldsymbol{B}$ です。これらは一見すると、それぞれ異なる種類の演算のように思えます。

微分形式の観点から見ると、これらの 3 つの演算は、**外微分** (exterior derivative) と呼ばれるただ一つの演算子 d の異なる側面として、驚くほどシンプルに統一されます。その対応関係を先に示しましょう。

- **0-形式** (スカラー場 f) $\xrightarrow{d}$ **1-形式** ($\mathrm{grad}f$ に対応)

- **1-形式** (ベクトル場 $\boldsymbol{A}$) $\xrightarrow{d}$ **2-形式** (curl$\boldsymbol{A}$ に対応)
- **2-形式** (ベクトル場 $\boldsymbol{B}$) $\xrightarrow{d}$ **3-形式** (div$\boldsymbol{B}$ に対応)

この統一的な視点から得られる最も美しい帰結の一つは、ベクトル解析における恒等式

$$\mathrm{curl}(\mathrm{grad} f) = 0$$
$$\mathrm{div}(\mathrm{curl}\boldsymbol{A}) = 0$$

が、外微分 d の極めてシンプルな性質

$$d(d\omega) = 0 \quad (\text{任意の微分形式 } \omega \text{ に対して})$$

という一つの式に集約されることです。この $d^2 = 0$ という関係は、コホモロジー理論全体の根幹をなす、極めて重要な性質です。

このように、微分形式は既存の知識をより高い視点から整理し、その本質的な構造を明らかにする強力な枠組みを提供します。次節からは、この微分形式を厳密に定義し、その性質を詳しく見ていきましょう。

2.2 微分形式のより数学的な定義

前節では微分形式を直感的に導入しましたが、ここではその数学的な定義を与えます。微分形式は、多様体 M の各点 p における**余接空間** (cotangent space) T_p^*M を材料として構成されます。

2.2.1 0-形式：関数

最も簡単な微分形式は **0-形式**です。これは物理学者にとっては馴染み深い対象です。

定義 2.1: 0-形式

多様体 M 上の **0-形式**とは、M 上で定義された滑らかな（C^∞ 級の）実数値関数のことである。M 上の 0-形式全体のなすベクトル空間を $\Omega^0(M)$ と書く。

$$\Omega^0(M) := C^\infty(M, \mathbb{R})$$

例えば、温度分布 $T(x, y, z)$ やポテンシャル $\phi(x, y, z)$ などは、$\mathbb{R}^3$ 上の 0-形式と見なせます。

2.2.2 1-形式：余接ベクトル場

1-形式は、多様体の各点に、その点における「接ベクトルを飲み込んで実数を返す機械」を対応させたものです。この「機械」は、数学的には**余接ベクトル** (cotangent vector) と呼ばれます。

定義 2.2: 1-形式

多様体 M 上の **1-形式** ω とは、M の各点 p に対して、その点における余接ベクトル $\omega_p \in T_p^*M$ を滑らかに対応させる写像（ベクトル束 T^*M の切断 (セクション)）のことである。M 上の 1-形式全体のなすベクトル空間を $\Omega^1(M)$ と書く。

局所座標 $(x^1, \ldots, x^n)$ を考えると、任意の 1-形式 ω は、関数 $f_i(x)$ を用いて次のように一意に書くことができます。

$$\omega = f_1(x)dx^1 + f_2(x)dx^2 + \cdots + f_n(x)dx^n = \sum_{i=1}^{n} f_i(x)dx^i$$

ここで、dx^i は座標関数の微分であり、余接空間 T_p^*M の基底をなします。これを**基底 1-形式**と呼びます。

物理における 1-形式

力 $\boldsymbol{F} = (F_x, F_y, F_z)$ がなす微小仕事 δW は、変位ベクトルを $d\boldsymbol{r} = (dx, dy, dz)$ として、$\delta W = \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = F_x dx + F_y dy + F_z dz$ と書けます。この表現は、力が 1-形式と見なせることを示唆しています。同様に、ベリー接続や電磁ポテンシャルも 1-形式として扱われます。

2.2.3 k-形式：交代 k-テンソル場

1-形式の概念を一般化することで、k-形式が定義されます。k-形式は、直感的には「k 個の接ベクトルを飲み込んで実数を返す、反対称な機械」です。

定義 2.3: k-形式

多様体 M 上の $\boldsymbol{k}$**-形式**とは、M の各点 p に対して、余接空間 T_p^*M から作られる k 階の交代テンソル空間 $\Lambda^k(T_p^*M)$ の元を、滑らかに対応させる写像（ベクトル束 $\Lambda^k(T^*M)$ の切断）のことである。M 上の k-形式全体のなすベクトル空間を $\Omega^k(M)$ と書く。

k-形式を構成する基本的な演算が**ウェッジ積**（外積）$\wedge$ です。ウェッジ積は、2 つの微分形式を組み合わせて、より次数の高い微分形式を作る演算で、次の重要な性質を持ちます。

- **交代性**: $\alpha \in \Omega^p(M), \beta \in \Omega^q(M)$ に対して、$\alpha \wedge \beta = (-1)^{pq} \beta \wedge \alpha.$

特に、同じ 1-形式のウェッジ積はゼロになります: $dx^i \wedge dx^i = 0$。

この性質を用いると、局所座標表示では、任意の k-形式は次のように書けます。

$$\omega = \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n} f_{i_1 i_2 \ldots i_k}(x) dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}$$

例えば、$\mathbb{R}^3$ 上の 2-形式は、$\omega = f_{12} dx \wedge dy + f_{23} dy \wedge dz + f_{31} dz \wedge dx$ という形をしています。これは、面積分される磁束などの量に対応します。

3 微分形式の基礎

3.1 外微分 d とウェッジ積 $\wedge$

微分形式の代数構造を定め、また物理における微分演算子 $(\mathrm{grad}, \mathrm{curl}, \mathrm{div})$ を統一的に記述するのが、**ウェッジ積** $\wedge$ と**外微分** d です。

ウェッジ積は、前節で交代性 $\alpha \wedge \beta = (-1)^{pq}\beta \wedge \alpha$ を紹介しましたが、より一般的には次の性質を満たす演算として定義されます。

- **双線形性**: $(\alpha_1 + \alpha_2) \wedge \beta = \alpha_1 \wedge \beta + \alpha_2 \wedge \beta, \quad \alpha \wedge (\beta_1 + \beta_2) = \alpha \wedge \beta_1 + \alpha \wedge \beta_2$
- **結合法則**: $(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma = \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)$

一方、外微分は、微分形式の階数を一つ上げる、最も重要な演算子です。

定義 3.1: 外微分

外微分 d とは、k-形式の空間 $\Omega^k(M)$ から $k+1$-形式の空間 $\Omega^{k+1}(M)$ への写像 $d : \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M)$ であり、次の性質を満たすものである。

1. **線形性**: $d(\alpha + \beta) = d\alpha + d\beta$
2. **ライプニッツ則**: $\alpha \in \Omega^p(M), \beta \in \Omega^q(M)$ に対し、
$$d(\alpha \wedge \beta) = (d\alpha) \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge (d\beta)$$
3. **二重性** ($d^2 = 0$): 任意の形式 ω に対し、$d(d\omega) = 0$
4. **関数への作用**: $f \in \Omega^0(M)$ に対して、df は関数の全微分に一致する。

局所座標 $(x^1, \ldots, x^n)$ を用いると、外微分は具体的に計算できます。k-形式 $\omega = \sum_I f_I(x) dx^I$ (ただし I は $i_1 < \cdots < i_k$ なる添字の組) に対する外微分は、

$$d\omega = \sum_I df_I \wedge dx^I = \sum_I \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial f_I}{\partial x^j} dx^j \right) \wedge dx^I$$

と定義されます。この定義から、$d^2 = 0$ という性質は、偏微分の可換性 $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i}\right)$ とウェッジ積の交代性 $(dx^j \wedge dx^i = -dx^i \wedge dx^j)$ から直接導かれる、美しい帰結です。

ベクトル解析と外微分

$\mathbb{R}^3$ において、外微分 d が $\mathrm{grad}, \mathrm{curl}, \mathrm{div}$ に対応することを見てみましょう。

- **grad**: 0-形式 $f(x, y, z)$ に d を作用させると、
$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz$$
これは、$\mathrm{grad} f = (\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z})$ に対応する 1-形式です。
- **curl**: 1-形式 $\omega = A_x dx + A_y dy + A_z dz$ に d を作用させると、
$$\begin{aligned} d\omega &= dA_x \wedge dx + dA_y \wedge dy + dA_z \wedge dz \\ &= \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) dx \wedge dy + \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) dz \wedge dx \end{aligned}$$
この各成分は、$\mathrm{curl} \boldsymbol{A}$ の z, x, y 成分に（符号を除き）対応しています。

- **div**: 2-形式 $\eta = B_x dy \wedge dz + B_y dz \wedge dx + B_z dx \wedge dy$ に d を作用させると、

$$d\eta = \left(\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} \right) dx \wedge dy \wedge dz$$

  これは、$(\mathrm{div}\boldsymbol{B})$ に対応する 3-形式（体積要素）です。

この対応により、$\mathrm{curl}(\mathrm{grad} f) = 0$ と $\mathrm{div}(\mathrm{curl}\boldsymbol{A}) = 0$ は、共に $d^2 = 0$ という一つの幾何学的な事実に集約されるのです。

3.2 多様体上の積分と一般化されたストークスの定理

微分形式の理論がもたらす最も強力な結果の一つが、**一般化されたストークスの定理**です。この定理は、多様体上の「微分」と「積分」という局所的な操作と大域的な操作を繋ぐ、深遠な関係式です。

まず、多様体上での積分を定義する必要があります。k 次元の（向き付けられた）多様体 C 上では、k-形式 ω を積分することができます。直感的には、C を微小な k 次元平行六面体に分割し、各々で ω の値を評価して足し合わせる操作です。具体的には、C の局所的なパラメータ表示 $\phi : U \to C$ $(U \subset \mathbb{R}^k)$ を用いて、ω を U 上の形式に引き戻し（pullback)、$\mathbb{R}^k$ 上の通常の多重積分として計算します。

$$\int_C \omega := \int_U \phi^* \omega$$

この積分の定義のもとで、一般化されたストークスの定理は驚くほどシンプルな形で記述されます。

一般化されたストークスの定理

M を向き付けられた k 次元多様体とし、その境界を ∂M とする。ω を M 上で定義された $(k-1)$-形式とすると、次が成り立つ。

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega$$

ただし、境界 ∂M の向きは M の向きから誘導されるものとする。

この定理は、「ある領域 M における『何かの湧き出し』$(d\omega)$ の総和は、その領域の境界 ∂M から流れ出る『何か』(ω) の総量に等しい」と解釈できます。この一つの定理が、大学初年度で学んだベクトル解析の主要な積分定理をすべて内包しているのです。

ストークスの定理の具体例

- **微積分学の基本定理**: $M = [a, b]$ (1 次元多様体)、$\omega = f$ (0-形式)。

$$\int_{[a,b]} df = \int_a^b f'(x)dx, \quad \int_{\partial M} f = f(b) - f(a)$$

  よって、$\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a)$。
- **ストークスの定理**: M が $\mathbb{R}^3$ 内の曲面、ω が 1-形式 (ベクトルポテンシャルに対応)。

$$\int_M d\omega \iff \int_M (\mathrm{curl}\boldsymbol{A}) \cdot d\boldsymbol{S}, \quad \int_{\partial M} \omega \iff \oint_{\partial M} \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{l}$$

- **ガウスの発散定理**: M が $\mathbb{R}^3$ 内の体積領域、ω が 2-形式 (ベクトル場に対応)。

$$\int_M d\omega \iff \int_M (\mathrm{div}\boldsymbol{B})dV, \quad \int_{\partial M} \omega \iff \oint_{\partial M} \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{S}$$

本章で導入した微分形式、外微分 d ($d^2 = 0$)、そしてストークスの定理は、次章で学ぶド・ラームコホモロジーを定義し、その性質を理解するための根幹をなす数学的道具です。

4　閉形式と完全形式 ― コホモロジーの心

前章で、我々は微分形式という言語と、外微分 d という演算子を手に入れました。特に、$d^2 = 0$ という性質は、単なる計算上の都合ではなく、これから展開する理論の根幹をなす、極めて重要な構造です。本章では、この性質から自然に導かれる**閉形式**と**完全形式**という概念を導入します。この二つの概念の「ズレ」を調べることこそが、コホモロジー理論の本質であり、多様体の「穴」を検出する巧妙な仕組みの核心部分となります。

4.1　閉形式 $(d\omega = 0)$ と完全形式 $(\omega = d\eta)$

外微分 d を用いて、微分形式を二つの重要なクラスに分類します。

定義 4.1: 閉形式 (Closed Form)

k-形式 ω が**閉形式** (closed form) であるとは、その外微分がゼロになること、すなわち

$$d\omega = 0$$

が成り立つことである。閉である k-形式全体のなすベクトル空間を $Z^k(M)$ と書く。

定義 4.2: 完全形式 (Exact Form)

k-形式 ω が**完全形式** (exact form) または**完全微分形式**であるとは、ある $(k-1)$-形式 η の外微分として書けること、すなわち

$$\omega = d\eta$$

を満たす $\eta \in \Omega^{k-1}(M)$ が存在することである。完全である k-形式全体のなすベクトル空間を $B^k(M)$ と書く。

これらの定義と、$d^2 = 0$ という性質から、直ちに次の重要な関係が導かれます。

完全形式は閉形式である

任意の完全形式は閉形式である。すなわち、$B^k(M) \subset Z^k(M)$ が成り立つ。

証明

ω を任意の完全形式とすると、定義よりある $(k-1)$-形式 η が存在して $\omega = d\eta$ と書ける。この両辺に外微分 d を作用させると、

$$d\omega = d(d\eta)$$

となる。$d^2 = 0$ の性質により、右辺は恒等的にゼロである。よって $d\omega = 0$ となり、ω は

閉形式である。

この命題の逆、すなわち「**任意の閉形式は完全形式か？**」という問いこそが、コホモロジー理論における中心的な問いです。もし、すべての閉形式が完全形式であるならば、この理論はそこで終わってしまいます。しかし、一般にはこの逆は成り立ちません。閉形式でありながら完全形式ではない形式が存在しうるのです。その存在は、多様体 M が「穴」などの非自明なトポロジーを持つことを示唆します。

4.2 直感的なイメージ：渦なしの流れとポテンシャルの存在

閉形式と完全形式の概念は、物理学における直感的なイメージと結びつけると理解が深まります。

- **閉形式** ($d\omega = 0$) は、「局所的に湧き出しや渦がない」状態を表します。
  - **電磁気学**: 磁場に対応する 2-形式 F が $dF = 0$ を満たすことは、$\mathrm{div}\boldsymbol{B} = 0$、すなわち磁気モノポールが存在しない（どこにも湧き出しがない）ことに対応します。
  - **流体力学**: 速度場に対応する 1-形式 v が $dv = 0$ を満たすことは、$\mathrm{curl}\boldsymbol{v} = 0$、すなわち流れが渦なし（非回転的）であることに対応します。
- **完全形式** ($\omega = d\eta$) は、ポテンシャルの存在を意味します。
  - **電磁気学**: 磁場 F が $F = dA$（A はベクトルポテンシャル）と書けることは、まさに F が完全形式であることを意味します。
  - **力学**: 保存力 $\boldsymbol{F}$ が、$\boldsymbol{F} = -\mathrm{grad}\phi$ とスカラーポテンシャル ϕ から導かれることは、力に対応する 1-形式が完全形式であることに他なりません。

この対応を踏まえると、「閉形式は完全形式か？」という問いは、「**渦なしの流れは、常にポテンシャルを持つか？**」という物理的な問いに翻訳できます。$\mathbb{R}^3$ のような「穴」のない空間では、答えは Yes です（ポアンカレの補題）。しかし、空間に「穴」が開いていると、局所的には渦がなくても、穴を一周する経路に沿ってポテンシャルが上がり（または下がり）続けてしまい、大域的に一価のポテンシャルを定義できなくなる場合があります。この「定義できなさ」の度合いを測るのがコホモロジーなのです。

4.3 簡単な例で考えてみよう

閉形式と完全形式の違いが、いかにして多様体のトポロジーを反映するか、具体的な例で見ていきましょう。

4.3.1 円周 S^1：穴が 1 つの空間

$S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ は、中心に 1 つの「穴」が空いた最も単純な多様体です。角度座標 θ を用いてパラメータ表示できますが、θ 自体は S^1 上の一価の関数ではないことに注意が必要です（$\theta = 0$ と $\theta = 2\pi$ は同じ点を指すため）。

ここで、次の 1-形式を考えます。

$$\omega = d\theta$$

これは局所的には関数の微分として定義され、S^1 上で矛盾なく定義される 1-形式です。

- ω **は閉形式か？**: はい。$d\omega = d(d\theta) = 0$ なので、ω は閉形式です。
- ω **は完全形式か？**: いいえ。もし ω が完全形式ならば、$\omega = df$ となるような S^1 上の滑らかな「大域的な」関数 f (0-形式) が存在するはずです。しかし、そのような関数は $f(\theta) = \theta + C$ となりますが、これは S^1 上で一価の関数ではないため、S^1 上の 0-形式とはなりえません。

よって、$\omega = d\theta$ は、S^1 上の**閉形式であるが完全形式ではない** 1-形式の典型例です。この形式の存在が、S^1 の「穴」を捉えています。実際、この形式を S^1 に沿って一周積分すると、

$$\int_{S^1} \omega = \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi \neq 0$$

となり、ストークスの定理からも、もし $\omega = df$ であったなら境界のない S^1 上での積分はゼロになるはず、という事実と矛盾しません。

4.3.2 球面 S^2：穴のない空間

次に、2 次元球面 S^2 を考えましょう。S^2 は 1 次元の「穴」（輪っか）を持ちませんが、2 次元の「空洞」を持っています。

- **1-形式**: S^2 上では、任意の閉 1-形式は必ず完全形式になることが知られています。これは、S^2 上のどんな閉ループも連続的に 1 点に収縮できる（単連結である）ため、ループに沿った積分が常にゼロとなり、大域的なポテンシャルを定義できるからです。
- **2-形式**: S^2 の面積要素 ω_A を考えます。これは S^2 の全表面積を与える 2-形式で、その積分は $\int_{S^2} \omega_A = 4\pi r^2 \neq 0$ です。
  - ω_A **は閉形式か？**: はい。多様体自身の次元と同じ次数の形式は、常に閉形式です（直感的には、これ以上外微分すると次元が上がってしまいゼロになる）。
  - ω_A **は完全形式か？**: いいえ。もし $\omega_A = d\eta$ となる 1-形式 η が存在したとすると、ストークスの定理より

    $$\int_{S^2} \omega_A = \int_{S^2} d\eta = \int_{\partial S^2} \eta = 0$$

    となるはずです（S^2 には境界がないので $\partial S^2 = \emptyset$）。これは積分値が非ゼロである事実に反します。

S^2 では、閉であるが完全でない「2-形式」が存在し、これが球面の「空洞」という 2 次元的なトポロジーを捉えています。

4.3.3 トーラス T^2：2 種類の穴を持つ空間

ドーナツの表面であるトーラス T^2 は、縦方向と横方向の 2 つの異なる「穴」を持つ、より興味深い例です。角度座標 (θ, ϕ) でパラメータ表示できます。ここでは、次の 2 つの 1-形式を考えます。

$$\omega_\theta = d\theta, \quad \omega_\phi = d\phi$$

S^1 の場合と同様に、これらは両方とも閉形式ですが、完全形式ではありません。重要なのは、この 2 つの形式が「独立」であることです。

- 縦方向のループ C_θ (ϕ を固定して θ を一周) に沿って積分すると、

$$\int_{C_\theta} \omega_\theta = 2\pi, \quad \int_{C_\theta} \omega_\phi = 0$$

- 横方向のループ C_ϕ (θ を固定して ϕ を一周) に沿って積分すると、

$$\int_{C_\phi} \omega_\theta = 0, \quad \int_{C_\phi} \omega_\phi = 2\pi$$

このように、ω_θ は縦穴を、ω_ϕ は横穴を、それぞれ検出する役割を担っています。トーラスには、独立な閉であるが完全でない 1-形式が 2 種類存在し、これが 2 つの 1 次元の穴に対応しています。また、トーラスの面積要素 $\omega_A = d\theta \wedge d\phi$ は、球面の場合と同様に、閉であるが完全でない 2-形式となり、トーラス内部の 2 次元の「空洞」を捉えます。

5　ド・ラームの定理と物理への応用

これまでの章で、我々は多様体上の微分形式を用いてド・ラームコホモロジーを定義し、それが多様体の「穴」の構造を捉えることを見てきました。本章では、この理論がもたらす最も深遠な結果の一つであるド・**ラームの定理**を紹介します。この定理は、微分形式という解析的な道具を用いて定義されたコホモロジーが、本質的には多様体の位相的（連続的な変形で変わらない）性質であることを保証するものです。この数学的な橋渡しを理解した上で、我々は再び物理の世界に戻り、ベリー曲率から得られるチャーン数がなぜ量子化されるのか、その背後にある幾何学的な構造をコホモロジーの観点から明らかにします。

5.1　ド・ラームの定理：解析学と代数学の架け橋

ド・ラームコホモロジー $H^k_{\mathrm{dR}}(M)$ は、滑らかな関数や微分といった、多様体の「滑らかさ（微分構造）」に依存した解析的な対象から構成されました。一方で、多様体の「穴」の数を数えるという目的は、本来、空間の繋がり方だけが問題になる純粋な「位相的」なものであるはずです。

この二つの異なる世界の間に、見事な橋を架けるのが**ド・ラームの定理**です。この定理は、ド・ラームコホモロジーが、代数的トポロジーの手法で定義される**特異コホモロジー**と自然に同型であることを主張します。

ド・ラームの定理

M を滑らかな多様体とする。このとき、k 次のド・ラームコホモロジー群 $H^k_{\mathrm{dR}}(M)$ と、実数を係数とする k 次の特異コホモロジー群 $H^k(M;\mathbb{R})$ の間には、自然な同型が存在する。

$$H^k_{\mathrm{dR}}(M) \cong H^k(M;\mathbb{R})$$

この定理の核心は、同型写像が具体的に構成できる点にあります。それは、閉 k-形式 ω のコホモロジー類 $[\omega]$ を、次のように特異コチェインへと対応させる写像です。

$$[\omega] \mapsto \left(\sigma \mapsto \int_\sigma \omega\right)$$

ここで σ は特異 k-単体（k 次元の三角形の一般化）と呼ばれるものであり、写像は「k-形式 ω を、k-単体 σ 上で積分する」という操作を定めています。ストークスの定理 $\int_{\partial c}\omega = \int_c d\omega$ が、この対応がコホモロジーのレベルでうまく定義されている（well-defined である）ことを保証する鍵となります。

ド・ラームの定理の重要性は、コホモロジーが多様体の微分構造に依らない、純粋な**位相不変量**であることを示した点にあります。つまり、同じ位相構造を持つ多様体（例えば、コーヒーカップとドーナツ）であれば、その滑らかな形が多少異なっていても、コホモロジー群は同じになるのです。解析学を用いて計算した「穴」の数が、確かにトポロジー的な「穴」の数に一致することが、ここに保証されます。

5.2 （少しだけ）特異コホモロジーの世界

ド・ラームの定理の右辺に現れた特異コホモロジーとは何でしょうか。ここではその厳密な定義には立ち入りませんが、微分を用いない、より組み合わせ論的な「穴」の数え方であることの雰囲気だけを掴んでおきましょう。

- **特異単体とチェイン**: まず、標準 k-単体（点、線分、三角形、四面体…）から多様体 M への連続写像 $\sigma : \Delta^k \to M$ を**特異 k-単体**と呼びます。これらを「多様体を調べるための探査機」と見なします。そして、これらの整数係数の形式的な和を **k-チェイン**と呼びます。
- **境界作用素とホモロジー**: チェインに対して、その「境界」を対応させる**境界作用素** ∂ を定義できます（例：三角形の境界は三辺の和)。この作用素は、$d^2 = 0$ と同様に $\partial^2 = 0$ を満たします。これを用いて、「境界を持たないチェイン（サイクル)」を「何かの境界であるチェイン（バウンダリ)」で割ったものとして、**特異ホモロジー群** $H_k(M)$ が定義されます。これは、k 次元の「穴」の存在を直接的に捉えるものです。
- **コチェインとコホモロジー**: 特異コホモロジー $H^k(M; \mathbb{R})$ は、このホモロジーの双対的な概念です。各 k-チェインに対して実数を対応させる写像（**k-コチェイン**）を考え、境界作用素の双対である**コバウンダリ作用素** δ（これも $\delta^2 = 0$ を満たす）を用いて構成されます。

重要なのは、この構成が全く微分を使わず、多様体の連続性（位相）のみに依存している点です。ド・ラームの定理は、この全く異なるアプローチが、微分形式を用いたアプローチと本質的に同じ結論に至ることを示しているのです。

5.3 物理との接続：ゲージ理論とチャーン類

ド・ラームの定理によって得られた知見を、再び物性物理の問題に還元しましょう。我々は第 1 章で、ベリー曲率 2-形式 $\mathcal{F}$ をブリルアンゾーン T^2 上で積分することで、整数のチャーン数 C_1 が得られることを見ました。

$$C_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{T^2} \mathcal{F} \in \mathbb{Z}$$

なぜこの積分値が、きれいに整数に量子化されるのでしょうか。コホモロジー理論が、その根本的な理由を明らかにします。

ベリー接続 $\mathcal{A}$ とその曲率 $\mathcal{F}$ は、数学的には、パラメータ空間 M 上の $U(1)$ 主束（しゅそく）における接続と曲率として定式化されます。このような幾何学的な対象に対して、そのトポロジーを特徴づける不変量が定義されており、それを**特性類** (characteristic class) と呼びます。

特に、$U(1)$ 束に対しては、**第 1 チャーン類** c_1 と呼ばれる特性類が、整係数のコホモロジー群 $H^2(M; \mathbb{Z})$ の元として定義されます。この c_1 は、束のトポロジカルな「ねじれ」の度合いを表す不変量です。

そして、この代数的に定義されたチャーン類と、解析的に定義されたベリー曲率との間には、次の美しい関係があります（チャーン・ヴェイユ理論の特別な場合)。

チャーン類と曲率形式

第 1 チャーン類 $c_1 \in H^2(M;\mathbb{Z})$ を実係数コホモロジー $H^2(M;\mathbb{R})$ の中で考えると、それはベリー曲率 $\mathcal{F}$ が定めるド・ラームコホモロジー類 $[\mathcal{F}/2\pi] \in H^2_{\mathrm{dR}}(M)$ に一致する。

この関係こそが、チャーン数の量子化の起源です。積分 $\int_M \mathcal{F}/2\pi$ は、コホモロジー類 $[\mathcal{F}/2\pi]$ のある種の代表値ですが、その正体は整係数コホモロジーに由来する c_1 なのです。係数が整数であるというトポロジー的な制約が、結果として積分の値を整数にピン止めしていた、と理解できます。

この整数値は、系のハミルトニアンを連続的に変形させても変わらない、極めて頑健な**トポロジカル不変量**です。量子ホール効果において、ホール伝導率がプランク定数と電気素量のみで決まる普遍的な値の整数倍になる、という驚くべき実験事実は、このチャーン数が物理現象として現れたものに他なりません。このように、ド・ラームコホモロジーは、物理系の局所的な幾何学（ベリー曲率）と、測定にかかる大域的な不変量（量子化された伝導率）とを結びつける、不可欠な言語となっているのです。

6　量子幾何学との接続

これまでの章で、我々は微分形式からド・ラームコホモロジーへ至る数学的な道のりを歩み、それが物理、特に物性物理学と深く関わることを見てきました。本章では、これまでの議論を統合し、現代物性物理学における「量子幾何学」という視点を整理します。この視点に立つことで、ハミルトニアンのパラメータ空間が単なる変数の置き場所ではなく、波動関数が持つ本質的な幾何学構造（ベリー接続や量子距離）を備えた豊かな舞台であることが明らかになります。そして、その舞台のトポロジーが、量子ホール効果のような測定可能な物理現象を支配する様を、改めて確認します。

6.1　ベリー接続とベリー曲率

本稿で繰り返し登場したベリー接続とベリー曲率は、量子系のパラメータ空間における幾何学の中心的な役割を担います。その幾何学的な意味を再確認しておきましょう。

系のハミルトニアンが、波数ベクトル $\boldsymbol{k}$ などのパラメータに依存している状況を考えます。各 $\boldsymbol{k}$ に対して、系のエネルギー固有状態（ブロッホ状態）$|u(\boldsymbol{k})\rangle$ が定まります。このとき、パラメータ空間の全ての点に、系の状態ベクトルという「内部自由度」が乗っていると見なせます。この構造は、数学的には**ベクトル束**（特に、バンドが縮退していない場合は**ファイバー束**）として記述されます。

- **ベリー接続**: このベクトル束の上で、隣り合う点 $\boldsymbol{k}$ と $\boldsymbol{k}+d\boldsymbol{k}$ の状態ベクトルを「どのようにつなぐか」を定めるのが**ベリー接続** $\mathcal{A} = i\langle u(\boldsymbol{k})|\, d\,|u(\boldsymbol{k})\rangle$ です。これは、ゲージ理論における**ゲージポテンシャル**（接続形式）そのものであり、パラメータ空間上の「平行移動」のルールを定めます。
- **ベリー曲率**: ベリー接続の「曲がり具合」を測るのが**ベリー曲率** $\mathcal{F} = d\mathcal{A}$ です。これはゲージ理論における**場の強さ**に相当します。$\mathcal{F}$ がゼロでないことは、状態ベクトルをパラメータ空間内のある閉曲線に沿って平行移動させて元の点に戻したとき、元のベクトルとは位相がずれること（非自明なホロノミーを持つこと）を意味します。これは、ベクトル束が「ねじれている」ことの証です。

近年では、この幾何学構造をさらに特徴づける量として、**量子幾何テンソル** Q_{ij} が注目されています。

$$Q_{ij} = \langle\partial_i u|\,(1 - |u\rangle\langle u|)\,|\partial_j u\rangle$$

ここで $\partial_i = \partial/\partial k_i$ です。このテンソルの実部は**量子距離**（またはフビニ・スタディ計量）と呼ばれ、パラメータ空間上の二点間の「量子的な距離」を定義します。そして、その虚部がベリー曲率を与えます ($2\,\mathrm{Im}(Q_{ij}) = \mathcal{F}_{ij}$)。量子距離がパラメータ空間にリーマン計量を与えるのに対し、ベリー曲率はその空間にシンプレクティックな構造を与えます。この二つを合わせたものが、ブロッホバンドの持つ完全な量子幾何学なのです。

6.2 チャーン数とトポロジカル不変量（量子ホール効果など）

量子幾何学の最も重要な応用は、トポロジカル不変量の構成です。

ベリー曲率 $\mathcal{F}$ は、パラメータ空間の各点 $\boldsymbol{k}$ で定義される**局所的**な幾何学量でした。これに対し、**チャーン数** C は、この局所的な量をコンパクトなパラメータ空間（ブリルアンゾーン）全体で積分することで得られる**大域的**な量です。

$$C = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathrm{BZ}} \mathcal{F}$$

前章で議論したように、この積分値が整数になるのは、チャーン数が、根源的にはトポロジー的に定義される整数係数の特性類 $c_1 \in H^2(M; \mathbb{Z})$ に由来するためです。この整数は、系のハミルトニアンを、エネルギーギャップを閉じることなく連続的に変形させる限り変化しません。このような頑健性を持つ量が**トポロジカル不変量**です。

この最も有名な応用例が、**整数量子ホール効果**です。二次元電子系のホール伝導率 σ_{xy} が、物理定数と整数 N のみで決まるという驚くべき現象は、

$$\sigma_{xy} = N\frac{e^2}{h}, \quad N \in \mathbb{Z}$$

この整数 N が、フェルミ準位以下の全ての占有バンドのチャーン数の和 $\sum_n C_n$ に正確に対応することが理論的に示されています。実験で観測される見事な伝導率のプラトーは、まさにトポロジカル不変量の物理的な現れなのです。この考え方は、時間反転対称性によって保護されたトポロジカル絶縁体（$\mathbb{Z}_2$ 不変量で特徴づけられる）など、より広範なトポロジカル物性へと拡張されています。

6.3 物理に現れるコホモロジーの具体例

最後に、本稿で展開してきたコホモロジーの考え方が、いかに普遍的に物理現象の記述に現れるかを、いくつかの例で確認し、本稿を締めくくります。

- **アハラノフ=ボーム効果**: 物理学におけるコホモロジーの原点とも言える現象です。ソレノイドの外側では磁場 $\boldsymbol{B} = 0$ ですが、ベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ は存在します。$\boldsymbol{B} = \mathrm{curl}\boldsymbol{A}$ なので、磁場がない領域では $\mathrm{curl}\boldsymbol{A} = 0$、すなわち 1-形式 $\boldsymbol{A}$ は閉形式 $(d\boldsymbol{A} = 0)$ です。しかし、ソレノイドを避ける空間は $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ のように「穴」が空いているため、$\boldsymbol{A}$ は完全形式ではありません。この閉だが完全でない 1-形式の存在（$H^1_{\mathrm{dR}}(M) \neq 0$）が、観測可能な位相差 $\oint \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{l} \neq 0$ として現れます。
- **ディラックの磁気モノポール**: もし磁気モノポールが存在すれば、その点から磁場が湧き出すため、$\mathrm{div}\boldsymbol{B} \neq 0$ となります。これは、磁場に対応する 2-形式 F が閉形式ではない（$dF \neq 0$）ことを意味します。しかし、モノポールの位置を除いた空間 $M = \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ を考えれば、その上では $dF = 0$ です。モノポールを囲む球面 S^2 上での F の積分（全磁束）はゼロにならず、これは F が $H^2_{\mathrm{dR}}(S^2)$ の非自明な元を定めることを意味します。ディラッ

クの量子化条件は、この非自明なコホモロジー類を持つゲージ場と電子の波動関数が矛盾なく共存するための条件として導かれます。

- **場の理論におけるインスタントン**: 素粒子物理学の量子色力学 (QCD) などでは、ユークリッド化された時空上で意味を持つ、インスタントンと呼ばれる古典解が存在します。これらの解は、時空多様体の大域的なトポロジーを反映した整数（インスタントン数）によって分類されます。この整数は、ゲージ場の曲率から作られる 4-形式（第 2 チャーン類密度）を、4 次元時空全体で積分することによって得られ、これもまたコホモロジーの考え方の直接的な応用です。

これらの例が示すように、測定される物理量に、摂動に対して安定な「量子化された」数が現れるとき、その背後には、時空やパラメータ空間のトポロジーを反映したコホモロジー構造が隠れていることが多くあります。微分形式とコホモロジーは、そのような物理現象の背後にある、深く美しい幾何学的構造を解き明かすための、強力で普遍的な言語なのです。

付録 A　数学的な補足

本稿で駆け足で紹介した概念について、その数学的な定義をより正確な形で補足します。

A.1　多様体の定義と例

多様体 (manifold) とは、局所的にはユークリッド空間と見なせるような図形（位相空間）のことです。厳密には、いくつかの条件を満たす必要があります。

定義 付録 A.1: （滑らかな）多様体

n 次元（C^∞ **級）多様体** M とは、次の条件を満たす位相空間である。

1. **ハウスドルフ性**: 任意の異なる 2 点は、互いに交わらない近傍を持つ。
2. **第二可算性**: M を覆うことができる可算個（数え上げられる無限個）の開集合が存在する。
3. **局所ユークリッド性**: M の各点 p は、n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ の開集合と同相な近傍を持つ。この同相写像の組 (U, ϕ) を**座標近傍**または**チャート**と呼ぶ。
4. **座標変換の滑らかさ**: M を覆うチャートの集まり（**アトラス**）において、任意の二つのチャート (U_α, ϕ_α) と (U_β, ϕ_β) が重なる部分 $U_\alpha \cap U_\beta$ が空でないとき、**座標変換（貼り合わせ）写像**

$$\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1} : \phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

が C^∞ 級写像（何回でも微分可能な写像）である。

この最後の条件が、多様体上で微分積分学（解析学）を展開することを可能にする「滑らかさ」を保証します。

多様体の例

- $\mathbb{R}^n$: ユークリッド空間自身は、チャートが一つ（恒等写像）で済む最も自明な n 次元多様体です。
- **円周** S^1: 例えば、上半円と下半円をそれぞれ実数直線に射影する二つのチャートで覆うことができます。貼り合わせの写像は $x \mapsto 1/x$ となり、滑らかです。
- **球面** S^2: 北極と南極からの立体射影（ステレオ投影）は、それぞれ球面の大部分を $\mathbb{R}^2$ 平面に対応させるチャートを与えます。
- **トーラス** T^n: n 個の円周の直積 $S^1 \times \cdots \times S^1$ として定義される n 次元トーラスも多様体です。

A.2　写像の滑らかさと接ベクトル空間

多様体の定義ができたので、その上の「ベクトル」や「写像の微分」を定義できます。

■写像の滑らかさ　多様体 M から N への写像 $f : M \to N$ が**滑らか**であるとは、任意のチャートを用いて局所座標で表示したときに、$\mathbb{R}^m$ から $\mathbb{R}^n$ への通常の意味で滑らかな写像になっていることを言います。

■接ベクトルと接ベクトル空間　多様体 M の点 p における**接ベクトル**とは、その点を通る曲線たちの、無限小での振る舞いを抽象化したものです。現代数学では、物理的な直感と相性の良い「微分作用素」として定義するのが一般的です。

定義 付録 A.2: 接ベクトルと接空間

点 $p \in M$ における**接ベクトル** v_p とは、p の近傍で定義された滑らかな関数 f に対して実数を対応させる写像 $v_p : C^\infty(p) \to \mathbb{R}$ で、次の条件を満たすものである。

1. **線形性**: $v_p(af + bg) = av_p(f) + bv_p(g)$
2. **ライプニッツ則**: $v_p(fg) = f(p)v_p(g) + g(p)v_p(f)$

点 p における接ベクトル全体のなす集合を**接（ベクトル）空間**と呼び、T_pM と書く。

局所座標 $(x^1, \ldots, x^n)$ があれば、各偏微分作用素 $\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p$ はこの定義を満たし、それらは接空間 T_pM の基底をなします。したがって、任意の接ベクトルは $v_p = \sum_i v^i \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p$ と書けます。

A.3　ホモトピーと基本群（簡単な紹介）

ホモトピーは、二つの図形や写像が「連続的に変形して移りあえる」という関係を定式化する、トポロジーの中心的な概念です。

■ホモトピー　M 内の二つの道 $\gamma_0, \gamma_1 : [0, 1] \to M$ が、端点を固定したまま互いに**ホモトピック**であるとは、片方の道を粘土のように連続的に変形させて、もう片方の道にぴったり重ね合わせることができる、という状況を指します。

■基本群　多様体 M 内のある一点 p_0（基点）を固定し、そこから出発してそこに戻ってくるループ（閉路）全体を考えます。これらのループを、ホモトピーで移りあえるもの同士を同一視します。すると、このループの集合は、ループの「連結」を積の演算として、群をなすことが分かります。これを M の**基本群**と呼び、$\pi_1(M, p_0)$ と書きます。

基本群は、多様体の 1 次元的な「穴」の構造を捉える、最も基本的な位相不変量です。

- $\pi_1(\mathbb{R}^n) = \{e\}$（自明な群）
- $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$（整数群と同型。整数はループが穴を何周したかに対応）
- $\pi_1(S^2) = \{e\}$（球面上のループは全て 1 点に収縮できる）

- $\pi_1(T^2) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$（縦方向と横方向の二つの穴に対応）

基本群が自明な空間を**単連結**であると言います。

A.4 【発展】ホッジ理論とラプラシアン

ホッジ理論は、多様体のトポロジー（コホモロジー）を、その上の解析学（偏微分方程式）と結びつける、微分幾何学の金字塔です。

■前提：リーマン計量とホッジの $\star$ 作用素　まず、多様体に**リーマン計量**を定めます。これは、各点の接空間に内積を定めることで、多様体上でベクトルの長さや角度、体積などを測ることを可能にするものです。計量を定めると、**ホッジの $\star$ 作用素**が定義できます。これは、k-形式を $(n-k)$-形式に変換する線形写像 $\star : \Omega^k(M) \to \Omega^{n-k}(M)$ です。$\mathbb{R}^3$ では、1-形式と 2-形式の間の対応（$dx \leftrightarrow dy \wedge dz$ など）を与え、ベクトル解析における内積や外積と深い関係があります。

■ラプラシアンと調和形式　$\star$ 作用素を用いると、外微分 d の随伴作用素である**余微分** $\delta = \pm \star d \star$ が定義できます。d が形式の次数を一つ上げるのに対し、δ は次数を一つ下げます（$\delta^2 = 0$ も成立)。これらを用いて、**ラプラス-ド・ラーム作用素**（ラプラシアン）を次のように定義します。

$$\Delta = d\delta + \delta d$$

このラプラシアン Δ は、2 階の偏微分作用素です。そして、$\Delta\omega = 0$ を満たす微分形式 ω を**調和形式**と呼びます。

ホッジの定理

コンパクトで向き付けられたリーマン多様体 M 上では、任意のド・ラームコホモロジー類は、ただ一つの調和形式を代表元として含む。

$$H^k_{\mathrm{dR}}(M) \cong \{\omega \in \Omega^k(M) \mid \Delta\omega = 0\}$$

この定理は、多様体のトポロジー的な不変量であるコホモロジー群が、偏微分方程式 $\Delta\omega = 0$ の解空間と一対一に対応することを示しています。これにより、トポロジーの問題を解析学の問題に、あるいはその逆に、解析学の問題をトポロジーの問題に置き換えて研究する道が開かれます。物理学においても、ゲージ場の量子化や超対称性理論などで、この考え方は重要な役割を果たしています。